**Распределение Пуассона**

Ранее мы рассмотрели два типа дискретных числовых распределений: [биномиальное](http://baguzin.ru/wp/?p=5543) и [гипергеометрическое](http://baguzin.ru/wp/?p=5569). Во многих практически важных приложениях большую роль играет распределение Пуассона. Многие из числовых дискретных величин являются реализациями пуассоновского процесса, обладающего следующими свойствами:[[1]](#footnote-1)

* Нас интересует, сколько раз происходит некое событие в заданной области возможных исходов случайного эксперимента. Область возможных исходов может представлять собой интервал времени, отрезок, поверхность и т.п.
* Вероятность данного события одинакова для всех областей возможных исходов.
* Количество событий, происходящих в одной области возможных исходов, не зависит от количества событий, происходящих в других областях.
* Вероятность того, что в одной и той же области возможных исходов данное событие происходит больше одного раза, стремится к нулю по мере уменьшения области возможных исходов.

Чтобы глубже понять смысл пуассоновского процесса, предположим, что мы исследуем количество клиентов, посещающих отделение банка, расположенное в центральном деловом районе, во время ланча, т.е. с 12 до 13 часов. Предположим, требуется определить количество клиентов, приходящих за одну минуту. Обладает ли эта ситуация особенностями, перечисленными выше? Во-первых, событие, которое нас интересует, представляет собой приход клиента, а область возможных исходов — одноминутный интервал. Сколько клиентов придет в банк за минуту — ни одного, один, два или больше? Во-вторых, разумно предположить, что вероятность прихода клиента на протяжении минуты одинакова для всех одноминутных интервалов. В-третьих, приход одного клиента в течение любого одноминутного интервала не зависит от прихода любого другого клиента в течение любого другого одноминутного интервала. И, наконец, вероятность того, что в банк придет больше одного клиента стремится к нулю, если временной интервал стремится к нулю, например, становится меньше 0,1 с. Итак, количество клиентов, приходящих в банк во время ланча в течение одной минуты, описывается распределением Пуассона.

Распределение Пуассона имеет один параметр, обозначаемый символом λ (греческая буква «лямбда») – среднее количество успешных испытаний в заданной области возможных исходов. Дисперсия распределения Пуассона также равна λ, а его стандартное отклонение равно $\sqrt{λ}$. Количество успешных испытаний *Х* пуассоновской случайной величины изменяется от 0 до бесконечности. Распределение Пуассона описывается формулой:

(1) *Р(Х)* = $\frac{e^{–λ}λ^{X}}{X!}$

где *Р(Х)* — вероятность *X* успешных испытаний, λ — ожидаемое количество успехов, *е*— основание натурального логарифма, равное 2,71828, *X*— количество успехов в единицу времени.

Вернемся к нашему примеру. Допустим, что в течение обеденного перерыва в среднем в банк приходят три клиента в минуту. Какова вероятность того, что в данную минуту в банк придут два клиента? А чему равна вероятность того, что в банк придут более двух клиентов?

Применим формулу (1) с параметром *X* = 3. Тогда вероятность того, что в течение данной минуты в банк придут два клиента, равна



Вероятность того, что в банк придут более двух клиентов, равна Р(Х > 2) = Р(Х = 3) + Р(Х = 4) + ... + Р(Х = ∞) . Поскольку сумма всех вероятностей должна быть равной 1, члены ряда, стоящего в правой части формулы, представляют собой вероятность дополнения к событию Х≤ 2. Иначе говоря, сумма этого ряда равна 1 – Р(Х ≤ 2). Таким образом, Р(Х> 2) = 1 – Р(Х≤2) = 1 – [Р(Х = 0) + Р(Х = 1) + Р(Х = 2)]. Теперь, используя формулу (1), получаем:



Таким образом, вероятность того, что в банк в течение минуты придут не больше двух клиентов, равна 0,423 (или 42,3%), а вероятность того, что в банк в течение минуты придут больше двух клиентов, равна 0,577 (или 57,7%).

Такие вычисления могут показаться утомительными, особенно если параметр λ достаточно велик. Чтобы избежать сложных вычислений, многие пуассоновские вероятности можно найти в специальных таблицах (рис. 1). Например, вероятность того, что в заданную минуту в банк придут два клиента, если в среднем в банк приходят три клиента в минуту, находится на пересечении строки *X* = 2 и столбца λ = 3. Таким образом, она равна 0,2240 или 22,4%.



Рис. 1. Пуассоновская вероятность при λ = 3

Сейчас вряд ли кто-то будет пользоваться таблицами, если под рукой есть Excel с его функцией =ПУАССОН.РАСП() (рис. 2). Эта функция имеет три параметра: число успешных испытаний *Х*, среднее ожидаемое количество успешных испытаний λ, параметр *Интегральная*, принимающий два значения: ЛОЖЬ – в этом случае вычисляется вероятность числа успешных испытаний *Х* (только Х), ИСТИНА – в этом случае вычисляется вероятность числа успешных испытаний от 0 до *Х.*



Рис. 2. Расчет в Excel вероятностей распределения Пуассона при λ = 3

**Аппроксимация биноминального распределения с помощью распределения Пуассона**

Если число *n* велико, а число *р* — мало, биномиальное распределение можно аппроксимировать с помощью распределения Пуассона. Чем больше число *n* и меньше число *р*, тем выше точность аппроксимации. Для аппроксимации биномиального распределения используется следующая модель Пуассона.

(2) *Р(Х)* ≌ $\frac{e^{–np}(np)^{X}}{X!}$

где *Р(Х)* — вероятность *X* успехов при заданных параметрах *n* и *р*, *n* — объем выборки, *р*— истинная вероятность успеха, *е*— основание натурального логарифма, *X* — количество успехов в выборке (X = 0, 1, 2, ..., *n*).

Теоретически случайная величина, имеющая распределение Пуассона, принимает значения от 0 до ∞. Однако в тех ситуациях, когда распределение Пуассона применяется для приближения биномиального распределения, пуассоновская случайная величина — количество успехов среди *n* наблюдений — не может превышать число *n*. Из формулы (2) следует, что с увеличением числа *n* и уменьшением числа *р* вероятность обнаружить большое количество успехов уменьшается и стремится к нулю.

Как говорилось выше, математическое ожидание µ и дисперсия σ2 распределения Пуассона равны λ. Следовательно, при аппроксимации биномиального распределения с помощью распределения Пуассона для приближения математического ожидания следует применять формулу (3).

*(3) µ = Е(Х) = λ = np*

Для аппроксимации стандартного отклонения используется формула (4).

*(4) σ =* $\sqrt{λ}= \sqrt{np}$

Обратите внимание на то, что стандартное отклонение, вычисленное по формуле (4), стремится к стандартному отклонению в биномиальной модели – , когда вероятность успеха *p* стремится к нулю, и, соответственно, вероятность неудачи *1 – р* стремится к единице.

Предположим, что 8% шин, произведенных на некотором заводе, являются бракованными. Чтобы проиллюстрировать применение распределения Пуассона для аппроксимации биномиального распределения, вычислим вероятность обнаружить одну дефектную шину в выборке, состоящей из 20 шин. Применим формулу (2), получим

*Р(X=1)* ≌ $\frac{e^{–20\*0,08}(20\*0,08)^{1}}{1!}$ = 0,3230

Если бы мы вычислили истинное биномиальное распределение, а не его приближение, то получили бы следующий результат:



Однако эти вычисления довольно утомительны. В то же время, если вы используете Excel для вычисления вероятностей, то применение аппроксимации в виде распределения Пуассона становится излишним. На рис. 3 показано, что трудоемкость вычислений в Excel одинакова. Тем не менее, этот раздел, на мой взгляд, полезен понимаем того, что при некоторых условиях биноминальное распределение и распределение Пуассона дают близкие результаты.



Рис. 3. Сравнение трудоемкости расчетов в Excel: (а) распределение Пуассона; (б) биноминальное распределение

Итак, в настоящей и двух предыдущих заметках были рассмотрены три дискретных числовых распределения: [биномиальное](http://baguzin.ru/wp/?p=5543), [гипергеометрическое](http://baguzin.ru/wp/?p=5569) и Пуассона. Чтобы лучше представлять, как эти распределения соотносятся друг с другом приведем небольшое дерево вопросов (рис. 4).



Рис. 4. Классификация дискретных распределений вероятностей

Предыдущая заметка [Гипергеометрическое распределение](%D0%93%D0%B8%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%B3%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B5%20%D1%80%D0%B0%D1%81%D0%BF%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5)

Следующая заметка

К оглавлению [Статистика для менеджеров с использованием Microsoft Excel](http://baguzin.ru/wp/?p=5285)

1. Используются материалы книги Левин и др. Статистика для менеджеров. – М.: Вильямс, 2004. – с. 320–328 [↑](#footnote-ref-1)