**Даниил Бернулли. Опыт новой теории измерения жребия**

Представители [семьи Бернулли](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%91%D0%B5%D1%80%D0%BD%D1%83%D0%BB%D0%BB%D0%B8_%28%D1%81%D0%B5%D0%BC%D1%8C%D1%8F%29) в XVII–XVIII вв. внесли заметный вклад в развитие науки. Наверное, наиболее известными являются [Якоб](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%91%D0%B5%D1%80%D0%BD%D1%83%D0%BB%D0%BB%D0%B8%2C_%D0%AF%D0%BA%D0%BE%D0%B1) (1654–1708) и [Даниил](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%91%D0%B5%D1%80%D0%BD%D1%83%D0%BB%D0%BB%D0%B8%2C_%D0%94%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B8%D0%BB) (1700–1782). Несмотря на то, что мой блог посвящен менеджменту (и Excel), Google выдает 31 ссылку по запросу [Бернулли site:baguzin.ru](https://www.google.ru/?gws_rd=ssl#newwindow=1&q=%D0%91%D0%B5%D1%80%D0%BD%D1%83%D0%BB%D0%BB%D0%B8+site:baguzin.ru).[[1]](#footnote-1) В большинстве заметок речь идет о [распределении Бернулли](http://baguzin.ru/wp/?p=5663) (Якоб) и теории измерения жребия (Даниил). Статья, о которой пойдет речь в этой заметке, впервые была опубликована в 1738 г. в пятом томе «Комментариев Петербургской академии наук» (на латинском языке). Почему в Санкт-Петербурге? Дело в том, что Даниил Бернулли был среди 15 первых членов [Петербургской Академии наук](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%B0%D0%BD%D0%BA%D1%82-%D0%9F%D0%B5%D1%82%D0%B5%D1%80%D0%B1%D1%83%D1%80%D0%B3%D1%81%D0%BA%D0%B0%D1%8F_%D0%B0%D0%BA%D0%B0%D0%B4%D0%B5%D0%BC%D0%B8%D1%8F_%D0%BD%D0%B0%D1%83%D0%BA) на момент ее открытия в 1725 г.

На статью Бернулли широко ссылаются в экономической литературе. Она считается одним из первых трудов в области оценки риска.[[2]](#footnote-2) Она небольшая, поэтому я опубликовал ее лишь с незначительными сокращениями.

Д. Бернулли. Опыт новой теории измерения жребия // Вехи экономической мысли. Т. 1. Теория потребительского поведения и спроса. – СПб.: Экономическая школа, 1999. – С. 11–27.



§ 1. С тех пор, как математики занялись измерением жребия, все они утверждают: *оценку ожидания получим, если умножим оценки отдельных ожидаемых значений на число тех случаев, когда они могут произойти, и сумму полученных произведений разделим на число всех возможных случаев; при этом предполагается, что рассматриваемые случаи являются в равной степени возможными*.[[3]](#footnote-3) Если мы примем это правило, то дальнейшее развитие метода, очевидно, сводится к тому, чтобы перечислять вообще все мыслимые случаи, затем подразделять их по одинаковой степени возможности и в соответствии с этим классифицировать.

§ 2. Многочисленные доказательства, которые приводились для этого правила, при тщательной проверке всегда оказывались основанными на следующей гипотезе: если два лица чего-нибудь ожидают, то нет никакой причины, по которой один из них имел бы преимущество перед другим, поэтому шансы обоих следует считать равными; личные обстоятельства каждого из них при этом не имеют значения, а всё зависит от обстоятельств наступления ожидаемого события.

Подобное суждение могло бы быть постановлением, вынесенным верховным общественным судьей, но ведь здесь речь идет не о судебных решениях, а о рекомендациях, а именно — о правилах, посредством которых каждый сам мог бы оценить свой жребий в зависимости от состояния своих дел.

§ 3. Чтобы показать справедливость этого замечания, предположим, что бедняку выпал жребий, по которому он с равной вероятностью может или не получить ничего, или выиграть 20 000 дукатов. Даст ли он этому жребию оценку в 10 000 дукатов и будет ли его поступок неразумным, если он продаст этот жребий за 9000 дукатов? Мне так не кажется, хотя, с другой стороны, я полагаю, что очень богатый человек упустил бы свою выгоду, если бы отказался приобрести этот жребий за такую цену. Но если в этом случае я прав, то становится очевидной невозможность оценить жребий таким образом, чтобы эта оценка подходила для всех людей, а отсюда прежде всего следует, что мы должны отвергнуть правило, приведенное в § 1. Но, как может при серьезном размышлении убедиться каждый, применяемый в этом правиле термин «оценка» может быть определен так, что всё это правило, без сомнения, будет приемлемо для всех; действительно, *оценка измеряется не ценой вещи, а выгодой, которую каждый из нее извлекает*. Цена определяется самой вещью и одинакова для всех, а выгода зависит от личных обстоятельств. Так, без сомнения, для бедного доход в тысячу дукатов имеет большее значение, чем для богатого, в то время как его денежная ценность одинакова для обоих.

§ 4. Если мы умножим отдельные кажущиеся возможными выгоды на число случаев, в которых они могут наступить, и разделим сумму этих произведений на число всех возможных случаев, то получим среднюю выгоду, а доход, соответствующий этой выгоде, будет равнозначен оцениваемому жребию.

§ 5. Но тогда получается, что невозможно измерить жребий, если при этом неизвестна выгода, которую каждый извлекает из выигрыша, и наоборот, не может быть указан выигрыш, который необходим для достижения определенной выгоды, — это все вещи, о которых едва ли можно сказать что-нибудь определенное, так как они могут зависеть от различных обстоятельств.

Так, например, в большинстве случаев одинаковый выигрыш приносит бедному больше пользы, чем богатому; тем не менее для пленника, который уже имеет 2000 дукатов, но для обретения свободы ему требуется еще столько же, выигрыш в 2000 дукатов может быть более ценен, чем для менее богатого человека. Однако примеры такого рода, хотя их и можно было бы придумать бесчисленное множество, в действительности встречаются редко. Поэтому мы будем рассматривать только такие случаи, которые встречаются обычно; при этом для облегчения восприятия предположим, что состояние человека увеличивается непрерывно лишь посредством последовательных добавлений бесконечно малых приращений. Но в таком случае весьма вероятно, что любой малый выигрыш дает выгоду, которая обратно пропорциональна уже имеющемуся состоянию. Для пояснения этой гипотезы я должен прежде всего сказать, что под состоянием я понимаю здесь все то, что может дать пищу, одежду, удобства, даже роскошь и возможность удовлетворить какие-либо желания. В соответствии с этим мы не можем, собственно, ни о ком сказать, что он не имеет совсем ничего, если только он как раз сейчас не умирает с голоду, и для большинства людей основную часть их состояния составляет их работоспособность, которая включает в себя также и способность к попрошайничеству: того, кто попрошайничеством добывает ежегодно 10 золотых гульденов, трудно убедить при условии никогда больше не попрошайничать или не добывать чего-нибудь каким-либо иным способом, принять сумму в 50 золотых гульденов и тем самым лишить себя возможности существовать дальше, когда они кончатся; и даже если некто совершенно ничего не имеет и к тому же погряз в долгах, я позволю себе усомниться в том, что при таком условии он принял бы оплату своих долгов, даже с еще значительно б*о*льшим денежным подарком в придачу. Но если нищий не хочет согласиться на вышеуказанное условие, если только он не получит чистыми по крайней мере 100 золотых гульденов, а погрязший в долгах соглашается на это условие лишь в том случае, если он получит 1000 золотых гульденов, мы должны будем сказать, что состояние первого составляет 100, а второго 1000 гульденов, хотя по обычному словоупотреблению один из них не имеет ничего, а второй — еще меньше, чем ничего.

§ 6. После формулировки этого определения я возвращаюсь к утверждению предыдущего параграфа, а именно: если нет никаких необычных условий, то выгода, полученная из сколь угодно малого выигрыша, может считаться обратно пропорциональной имеющемуся состоянию.

Более внимательное изучение человеческой природы действительно показывает, что это положение применимо в большинстве случаев. Лишь немногие люди не используют полностью свой годовой доход. Предположим, что некто имеет состояние в 100 000 дукатов, а другой – такое же количество полудукатов. Тогда, если первый получает ежегодный доход в 5000 дукатов, а второй – опять такое же количество полудукатов, то совершенно очевидно, что для первого целый дукат значит ровно то же, что для второго полудукат, и поэтому доход в целый дукат для первого не представляет большей ценности, чем доход в полудукат – для второго. Следовательно, если каждый из них обоих получает выигрыш в один дукат, то для второго выгода возрастает вдвое, поскольку он выигрывает два полудуката. Далее, очевидно, что тот, кто меньше радуется выигрышу, спокойнее переносит и проигрыш. Вместе с тем иногда могут существовать особые условия, из-за которых дело может обстоять иначе, и чтобы охватить все случаи, я сначала проведу рассмотрение весьма обобщенно и лишь после этого перейду к нашей частной гипотезе.

§ 7. Пусть отрезок прямой АВ обозначает состояние, имевшееся перед наступлением выигрыша, о котором идет речь. Затем построим над продолжением BR отрезка АВ кривую BGS, ординаты которой CG, DH, EL, FM и т.д. показывают выгоды, которые соответствуют изображенным в виде абсцисс выигрышам ВС, BD, BE, BF и т.д.



Далее m, n, р, q и т.д. являются числами, показывающими, как часто могут наступать выигрыши ВС, BD, BE, BF и т.д., тогда (согласно § 4) средняя выгода будет представлена выражением:

$$PO= \frac{m×CG+n×DH+p×EL+q×FM+…}{m+n+p+q+…}$$

Если мы проведем прямую AQ перпендикулярно прямой AR и отложим на ней AN = РО, то отрезок NO – AB, т. е. ВР, покажет закономерно ожидаемый выигрыш или оценку рассматриваемого жребия. Далее, чтобы узнать, как велика должна быть ставка, соответствующая ожиданию выигрыша, нужно продолжить кривую в противоположную сторону так, чтобы теперь абсцисса Вр каждый раз показывала проигрыш, а относящаяся к ней ордината ро — соответствующий этому проигрышу убыток. Но так как в игре со справедливыми условиями убыток от проигрыша должен быть равен выгоде от выигрыша, следует принять, что A = AN, или ро = РО; тогда Вр обозначает ставку, которую не должен превышать никто, если он должным образом учитывает свое имущественное положение.

§ 8. Дополнение I. Согласно гипотезе, обычно использовавшейся до сих пор учеными и основанной на утверждении, что каждый выигрыш должен оцениваться исключительно по себе самому, и что он всегда доставляет прямо пропорциональную себе выгоду, кривая BS должна быть прямой линией; поэтому если по-прежнему

$$PO= \frac{m×CG+n×DH+p×EL+q×FM+…}{m+n+p+q+…}$$

то, подставляя с обеих сторон соответствующие пропорциональные величины, мы получим:

$$BP= \frac{m×BC+n×BD+p×BE+q×BF+…}{m+n+p+q+…}$$

в полном соответствии с обычно применяемым правилом.

§ 10. Исследуем природу кривой sBS. Однако в связи с тем, что на основе нашей гипотезы мы должны рассматривать бесконечно малые выигрыши, нам следует считать выигрыши ВС и BD почти равными, так что их разность CD будет бесконечно мала. Если затем провести Gr параллельно BR, то rН будет представлять бесконечно малую выгоду, которую некто, обладающий состоянием АС, получит благодаря бесконечно малому выигрышу СD. Однако эту выгоду нельзя оценивать просто по малому выигрышу CD (которому она, разумеется, при прочих равных условиях пропорциональна), но необходимо учитывать и имеющееся состояние АС, которому она обратно пропорциональна. Если мы положим АС = х, CD = *d*x, CG = у, rН = *d*y, кроме того АВ = α, и обозначим буквой b некоторую константу, то получим:

$$dy= \frac{b×dx}{x}$$

то есть[[4]](#footnote-4)

$$y=b×log\frac{x}{a}$$

Следовательно, кривая *sBS* представляет собой логарифмическую кривую, подкасательная которой всегда равна b, а асимптотой является *Qq*.[[5]](#footnote-5)

§ 11. Если мы сравним этот результат со сказанным в § 7, то очевидно

$$PO=b×log\frac{AP}{AB}$$

а также

$$CG=b×log\frac{AC}{AB}$$

$$DH=b×log\frac{AD}{AB}$$

и т.д.

Так как

$$PO= \frac{m×CG+n×DH+p×EL+q×FM+…}{m+n+p+q+…}$$

то отсюда следует:

$$b×log\frac{AP}{AB}=\left(mb×log\frac{AC}{AB}+nb×log\frac{AD}{AB} +pb×log\frac{AE}{AB}+qb×log\frac{AF}{AB}+…\right):(m+n+p+q+…) $$

а отсюда

$$AP=(AC^{m}×AD^{n}×AE^{p}×AF^{q}×…)^{\frac{1}{m+n+p+q+…}}$$

Если отсюда еще вычесть АВ, то остаток ВР будет представлять оценку рассматриваемого жребия.[[6]](#footnote-6)

§ 12. Таким образом, предыдущий параграф дал нам следующее правило: Каждый отдельный возможный доход после того, как к нему будет прибавлено имеющееся состояние, нужно возвести в ту степень, которая показывается числом соответствующих случаев; после этого все эти степени нужно перемножить и из их произведения извлечь корень, степень которого равна сумме всех вообще возможных случаев; если затем из этого корня вычесть имеющееся состояние, то полученный остаток даст оценку рассматриваемого жребия. Это положение является основным для определения оценки ожидания выигрыша в различных случаях.

§ 13. Из сказанного ранее прежде всего вытекает, что при любой игре, как бы справедливы ни были поставленные условия, каждый из двух партнеров с самого начала терпит некоторый ущерб, — конечно, это явное указание со стороны природы на необходимость избегать азартной игры. Это следует, однако, из вогнутости кривой[[7]](#footnote-7) sBS относительно BR. Если сделать ставку Вр равной ожидаемому выигрышу ВР, то окажется, что убыток *ро*, получающийся в случае проигрыша, всегда больше, чем ожидаемая выгода РО. Хотя для математика это должно быть достаточно ясно, для общего понимания мне хочется пояснить это на примере. Итак, имеются два игрока, каждый из которых обладает состоянием в 100 дукатов и половину из него ставит в игру, дающую одинаковые шансы обеим сторонам. Теперь каждый из игроков имеет оставшиеся у него 50 дукатов и, кроме того, надежду на выигрыш 100 дукатов. Однако эта сумма согласно правилу, рассмотренному в §12, имеет стоимость всего $(50^{1}×150^{1})^{^{1}/\_{2}}$ или $\sqrt{50×150}$, т.е. менее 87 дукатов, так что несмотря на полное равенство шансов каждый игрок при игре терпит убыток более чем в 13 дукатов. Чтобы сделать для всех понятной очевидную истину, что игрок действует тем безрассуднее, чем значительнее та часть его состояния, которую он ставит в азартную игру, мы рассмотрим тот же пример с единственным отличием — пусть один игрок, перед тем как сделать ставку 50 дукатов, имел их 200. Тогда он терпит убыток$ 200 – \sqrt{50×150}$, т.е. всего немногом более 6 дукатов.

§ 14. Если, следовательно, каждый, кто ставит сколь угодно малую часть своего состояния в азартную игру с равными шансами, поступает неразумно, интересно было бы исследовать здесь, насколько большое преимущество при ставке денег нужно иметь перед своим партнером, чтобы вступить в игру без ущерба. Опять возьмем как можно более простую игру: она состоит из двух одинаково возможных случаев — благоприятного и неблагоприятного. Пусть полученный в случае удачи выигрыш будет g, потерянная в случае неудачи ставка *х* и имеющееся состояние α. Тогда АВ = α, BP = g,

$РО=b×log\frac{α + g}{α}$

(см. § 10), а так как (согласно § 7) ро = РО, исходя из природы логарифмической кривой, получаем:

$$Bp= \frac{α×g}{α+g}$$

Но так как Вр представляет ставку х, мы получаем[[8]](#footnote-8):

$$x= \frac{α×g}{α+g}$$

т.е. величину, которая всегда меньше ожидаемого выигрыша g. Отсюда следует также, что очень неразумно действует тот, кто ставит все свое состояние в игру, надеясь выиграть еще столько же, это легко поймет каждый, кто правильно усвоил наши предшествующие определения. И общепризнанный в обыденной жизни факт, что кто-то может благоразумно рисковать в каком- либо сомнительном деле, а кто-то нет, — находит в вышесказанном свое объяснение.

§ 15. Особого рассмотрения заслуживают здесь обычаи купцов при страховании товаров в море. Для пояснения может служить следующий пример. Купец Каюс из Петербурга закупил в Амстердаме товары, которые он мог продать за 10000 рублей, если бы они находились в Петербурге. Он отправляет их морским путем, но не уверен, следует ли их страховать. При этом он знает, что из сотни судов, отправляющихся в это время года из Амстердама в Петербург, обычно пять погибают. Тем не менее он не может найти никого, кто бы за цену менее 800 рублей принял бы на себя страховку, а ему эта цена кажется чрезмерно высокой. Спрашивается: как велико должно быть состояние Ка- юса, не считая вышеуказанных товаров, чтобы его отказ от страховки можно было бы считать разумным? Обозначим это его состояние х\ тогда оно вместе с надеждой на счастливое прибытие товаров выразится следующим образом:

°V(x+ 10000)15-X

если он откажется от страховки; если же он, наоборот, согласится на нее, то он имеет надежное общее состояние (х + 9200). Если

мы обе эти величины приравняем друг к другу, то получим:

а + g

, откуда и следует результат

а

(х + 10000) 19 \* х = (х + 9200) 20

и отсюда, приблизительно: х = 5043. Таким образом, если Каюс, кроме надежды на свои товары, обладает еще суммой более 5043 рублей, то, отказавшись от страховки, он поступает разумно; если же он имеет меньше, то ему следовало бы на нее согласиться. Теперь спросим: каким, самое меньшее, состоянием должен обладать тот, кто берет на себя страховку за 800 рублей, чтобы его поступок можно было считать разумным? Для вычисления этого состояния у мы имеем уравнение:

20V(>’+ 800)1У • (у - 9200) = у

и отсюда, приблизительно: у - 14243 — число, которое без новых вычислений можно было бы вывести из найденного выше. Тот, кто имеет меньше, действует неразумно, если берет на себя

страхование, тогда как кто-нибудь, обладающий большим состоянием, поступит, сделав это, совершенно правильно. Отсюда видно, насколько выгодным оказалось введение таких страховок, так как оно может приносить большую пользу обеим сторонам. Если бы Ка юсу удалось договориться о страховке за 600 рублей, с его стороны было бы неразумно от нее отказываться, поскольку он обладает менее чем 20478 рублями, и наоборот, он действовал бы излишне осторожно, если бы так застраховал свои товары, имея состояние свыше 20478 рублей. С другой стороны, кто- нибудь, кто имеет менее 29878 рублей, поступил бы неразумно, если бы предложил Каюсу страховку за 600 рублей, и наоборот, для него это было бы выгодно, если бы он имел больше. Однако никто, даже если бы он был вдвое богаче, не сделал бы выгодного дела, взяв на себя такую страховку за 500 рублей.

§ 16. Далее из нашей теории следует еще одно правило, которое также не бесполезно для некоторых, а именно: те товары, которые подвергаются опасности, целесообразнее делить на несколько частей, чем рисковать всеми ими сразу. Мне хочется опять пояснить это более подробно. Семпрониус имеет всего наличными 4000 дукатов и, кроме того, в дальних странах — товаров стоимостью 8000 дукатов, перевезти которые можно только морем. Однако, по опыту известно, что из каждых десяти судов одно погибает. При этих условиях я утверждаю, что ожидание, связанное с этими товарами, имеет для Семпрониуса оценку в 6751 дукат (а именно:

lo,/l20009• 4000 — 4000), если он доверит все 8000 дукатов одно-

единственному судну. Но если он погрузит товары равными

19. Из этой формулы для ожидания выигрыша Павла следует, что его оценка возрастает с увеличением состояния, но оно никогда не станет бесконечно большим, если одновременно не является бесконечно большим имеющееся состояние.11 В качестве особых выводов получаем еще следующее: если Павел не имеет ничего, то оценка его жребия равна VT • 4Vr7 • V? • 16уЛП? ..., то есть равна 2 дукатам. Если он имеет 10 дукатов, то оценка его

жребия составляет приблизительно 3 дуката; далее — примерно 4-4

дуката при состоянии 100 дукатов и, наконец, 6 — при состоянии 1000 дукатов. Отсюда нетрудно заключить, какими огромными богатствами нужно обладать, чтобы купить ожидание выигрыша Павла с выгодой за 20 дукатов. Конечно, эта покупная цена несколько отличается от ожидания выигрыша, которым обладал бы покупатель при определенном состоянии а, однако рассматриваемое различие весьма незначительное, если а является большим числом. Если мы обозначим точную покупную цену х, то эта величина будет определяться уравнением:

Ча + i- х • ■ Ча + Т=1Г •

• lbVa + $ — х ... = а,

и если а является большим числом, этому уравнению действительно приблизительно удовлетворяет значение

X = 2^т ■ Ча Т? • ЧаТ 4' \* 16>^Г$... - а.

После того, как я опубликовал эти свои рассуждения, я послал экземпляр своей статьи вышеупомянутому г-ну Николаю Бернулли, чтобы узнать его мнение о моем решении предложенной им задачи. В письме, которое он написал мне в 1732 г., он сообщил, что ему очень нравятся мои рассуждения об определении оценки жребия, когда речь идет о том, что каждый должен оценивать свой собственный шанс. Иначе, однако, обстоит дело, когда третье лицо в качестве судьи должно указывать каждому партнеру его ожидания выигрыша по закону и спра-

То есть бесконечное произведение, фигурирующее в последней формуле,

сходится при л(обом конечном а. Моральное ожидание выигрыша, выражаемое этой формулой, неограниченно возрастает при а -\* °с.

ведливости, что л и сам подобным образом рассматриваю в § Далее он сообщил мне мнение, высказанное за несколько лет < выхода моей статьи знаменитым математиком Крамером, которое я нахожу настолько сходным с моим, что это согласие по такому вопросу кажется мне в высшей степени примечательным. Поэтому было бы вполне уместно привести здесь слова, которыми Крамер в письме, написанном моему двоюродному брату в 1728 г., сообщает свое мнение. Вот они: «Не знаю, не заблуждаюсь ли я, но мне кажется, что у меня есть решение того необыкновенного случая, который Вы предложили в своем письме

от 9 сентября 1713 г. (задача 5, стр. 402) господину де Монмору. Чтобы упростить этот случай, я предполагаю, что А бросает монету вверх, В обязуется давать ему 1 экю, если при первом броске монета упадет вверх крестом, 2 экю — если это произойдет только при втором броске, 4 — если при третьем, 8 — если при четвертом и т. д. Тогда парадокс состоит в том, что вычисление эквивалента, который А должен уплатить В, дает бесконечно большую сумму, что кажется нелепым, так как ни один сколько-нибудь здравомыслящий человек не дал бы за это и 20 экю. Откуда берется эта разница между математическим вычислением и общепринятой оценкой? Мне кажется, она объясняется тем, что (в теории) математики оценивают деньги только по их количеству, (на практике) разумные люди, наоборот, оценивают их по той пользе, которую из них можно извлечь. То, что делает математическое ожидание бесконечно большим,—эго огромная сумма, которую я могу выиграть, если сторона с крестом выпадет лишь очень нескоро, например, при сотом или тысячном броске. Однако эта сумма, если я сужу об этом здраво, значит для меня не больше, она не доставляет мне большего удовлетворения, не побуждает меня к игре сильнее, чем если бы она принесла мне 10 или 20 миллионов экю. Итак, предположим, что все суммы свыше 10 миллионов или, ради большего удобства, — свыше 224= 16777216 экю — равноцен-

ны между сооои, или лучше сказать, я никогда не могу получить более 22А экю, как бы поздно ни выпал крест; тогда мое ожидани имеет следующую стоимость:

\ ‘ 1 + \ ' 2 + ••• + ^7 ' + 0^5 ‘ 224 + 2^ ’ 224 +

\_ у „

Габриель Крамер (Cramer) (1704—1752) — швейцарский математик, профессор математики и философии в Базеле. Основные работы по теории систем

линейных уравнений.

224 + ...

Таким образом, моральная оценка моего ожидания сводится к 13 экю, и подлежащий уплате ее эквивалент —к такой же величине, что представляется значительно более разумным, чем увеличение его до бесконечности».

До этого места изложение искомого решения слишком неопределенно и небезупречно. Ведь если правда, что сумма в 225 не кажется нам больше, чем 224, то не следует вообще обращать внимание на сумму, которую я могу выиграть только после 24-го броска, так как, возможно, я уже перед 25-м броском имею 224 — 1, что по этой теории оказывается равнозначным с 224. Поэтому можно с одинаковым правом сказать, что мое

ожидание стбит не 13 экю, а всего 12. Впрочем, я говорю об этом совсем не затем, чтобы оспорить принцип вышеуказанного автора, ведь и мой принцип состоит в том, что разумные люди должны оценивать деньги по той пользе, которую они могут из них извлечь; скорее, я говорю об этом только для того, чтобы никто не воспользовался случаем дать отрицательную оценку самой этой теории. Как раз то же самое говорит и знаменитый Крамер нижеследующими словами, которые совсем в нашем духе. Он продолжает так: «Можно было

бы найти для него (эквивалента) еще меньшее значение, если

взять за основу какую-нибудь другую гипотезу о моральном значении богатств. Потому что применяемая здесь гипотеза ни в коей мере не является безусловно правильной, так как в действительности, должно быть, 100 миллионов кому-то доставляют больше удовольствия, чем 10 миллионов, хотя и не в 10 раз. Если, например, принять, что моральное значение благ пропорционально квадратному корню из их математической величины, т. е., что удовольствие, которое мне доставляют 40 миллионов, вдвое больше того, которое мне дают 10 миллионов, то мое моральное ожидание имело бы следующую оценку:

1 vT + 4л + + 1

2 4 8 2 — VI

Но эта величина еще не является искомым эквивалентом, потому что она сама по себе не равна стоимости ожидания, а имеет такую величину, что страдание от ее утраты равно мо-

ральному ожиданию того наслаждения, которое мне дал бы ее выигрыш. Следовательно (согласно нашему допущению), этот эквивалент должен составлять:

т. е. менее 3, что довольно мало и, тем не менее, как мне кажется, ближе к общепринятой оценке, чем 13».

1. По данным на 18 апреля 2015 г. [↑](#footnote-ref-1)
2. См. также [Даниил Бернулли – экономист](http://www.seinst.ru/page34/). [↑](#footnote-ref-2)
3. Здесь описано математическое ожидание: если отдельным значениям *xj*, *j = 1, 2, …* случайной величины *х* соответствуют вероятности *рj*, то математическое ожидание равно:

$$M\left(X\right)= \sum\_{j}^{}p\_{j}x\_{j}=\left(\sum\_{j}^{}n\_{j}x\_{j}\right)/n$$

где *nj* — число равновероятных исходов, при которых наблюдаются соответствующие значения случайной величины, а *n = n1 + n2 + …* — общее число исходов. Математическое ожидание как основная характеристика случайной величины рассматривалось предшественниками Бернулли; термин «математическое ожидание» введен позднее Лапласом. *Здесь и далее примечания П.А.Ватника* [↑](#footnote-ref-3)
4. Величина у получила название морального выигрыша при изменении состояния от уровня α до уровня х. Функция $y=b×ln\frac{x}{a}$ является решением дифференциального уравнения $dy= \frac{b × dx}{x}$, отвечающим начальному условию *у = 0* при *х = α*. [↑](#footnote-ref-4)
5. По современной терминологии – это длина подкасательной, если кривую рассматривать как график зависимости *х* от *у*. [↑](#footnote-ref-5)
6. Здесь введена числовая характеристика случайною выигрыша

$$\prod\_{j}^{}(g\_{j}+α)^{p\_{j}} – α\rightarrow \infty ,$$

где *gj* — возможные значения выигрыша, *pj* — их вероятности. Эта характеристика получила у Лапласа название «морального ожидания». Моральное ожидание всегда меньше математического ожидания; при α→∞ моральное ожидание имеет своим пределом математическое ожидание. [↑](#footnote-ref-6)
7. [↑](#footnote-ref-7)
8. [↑](#footnote-ref-8)