Альфред Реньи. Письма о вероятности: письма Паскаля к Ферма

Альфред Реньи (1921–1970) – выдающийся венгерский математик, прекрасный рассказчик и популяризатор науки. Ранее я уже представил две его работы: Записки студента по теории информации и Числа Фибоначчи. В настоящем эссе Реньи представляет письма французского ученого XVII века Блеза Паскаля к Пьеру Ферма. Первый наиболее известен своими трудами в области гидростатики. Его именем названа единица измерения давления в системе СИ. Второй прославился великой теоремой Ферма. Письма датируются 1654 г. и наряду с трудами Джироламо Кордано и Галилео Галилея считаются первыми работами в области теории вероятностей (подробнее см. Джироламо Кардано. О моей жизни).

Альфред Реньи. Письма о вероятности // Трилогия о математике. – М.: Мир, 1980. – С. 121–198

ПЕРВОЕ ПИСЬМО

Париж, предместье Сен-Мишель, 28 октября 1654 года
Г-ну Пьеру Ферма, Тулуза

Тягостная неопределенность коренится в предрассудке, что если люди о чем-либо не имеют полного знания, то они вообще ничего об этом не знают. Я же убежден, что частичное знание также является знанием, и неполная уверенность равным образом имеет некоторое значение, особенно когда мне известна степень этой уверенности. Кто-нибудь может спросить: «А разве можно измерить степень уверенности числом?» Конечно, отвечу я; лица, играющие в азартные игры, основывают свою уверенность именно на этом. Когда игрок бросает игральную кость, он заранее не знает, какое именно число очков выпадет. Но кое-что он все же знает. Например, то, что все шесть чисел — 1, 2, 3, 4, 5, 6 — имеют одинаковую долю успеха. Если мы условимся принять возможность появления достоверного за единицу, то возможность выпадения шестерки, так же, как и каждого из остальных пяти чисел, выразится дробью ⅙. Если бросить игральную кость четыре раза, то, как справедливо заметил шевалье де Мере, выгоднее (при равных ставках) держать пари, что по меньшей мере один раз выпадет шестерка. Это можно выразить и по-другому, сказав, что уверенность в событии выпадения по меньшей мере одной шестерки при четырехкратном бросании игральной кости будет больше чем ½.

Тем самым степень возможности наступления случайных событий соизмеряется с тем, какую часть единицы она составляет. Само собой разумеется, что степень уверенности в наступлении невозможного события оказывается равной нулю. Итак, если степень возможности появления случайного события является положительным числом, то это означает, что наступление этого события возможно, даже если шансы его наступления ничтожны. Степень возможности (уверенности) события я назвал *вероятностью*.

Если известно, что вероятность случайного события измеряется некоторым числом, то нам о нем известно нечто определенное, хотя, собственно говоря, у нас нет уверенности в его наступлении. Следовательно, надо ценить и неполное знание, но нельзя его переоценивать, смешивая с полным знанием. Монтень, «Опыты» которого — самая близкая для меня книга, сформулировал эту мысль так: «Меня заставили возненавидеть вероятные суждения те, кто выдает их за верные».

Может ли вероятность появления случайного события принимать любое значение между нулем и единицей? Я считаю, что да. Конечно, в азартных играх бывают только такие вероятности, которые можно выразить как отношение двух целых чисел. Ведь в этих играх всегда можно указать, сколько равновозможных и взаимно исключающих исходов может произойти. Таким образом, вероятность любого события, относящегося к результату игры, равна частному от деления числа благоприятных для этого события исходов на число всех возможных исходов.

Если событие подразделяется на несколько взаимно исключающих, то его вероятность равна сумме вероятностей, его составляющих, подобно тому как при делении определенного объема жидкости на несколько сосудов сумма объемов жидкости в отдельных сосудах равна объему всей жидкости. Другими словами, если в некоторой игре рассматривается несколько взаимно исключающих событий, то сумма вероятностей этих событий равна вероятности того, что какое-нибудь из этих событий наступит. Это правило я назвал *теоремой сложения вероятностей*.

Наряду с этой почти самоочевидной теоремой я устанавливаю также другую, более глубокую теорему, которую мне хотелось бы назвать *теоремой умножения вероятностей*. Она утверждает следующее: если некто сыграет в одну и ту же игру дважды, то вероятность того, что одно определенное событие произойдет при первой игре, а другое определенное событие (которое может быть тождественно первому или же отличаться от него) — при второй игре, будет равна произведению вероятностей этих событий при отдельных играх. То есть если я подбрасываю одну и ту же кость дважды, то вероятность того, что как при первом, так и при втором бросании получатся числа, отличные от шести, равна $^5/_6 \cdot {}^5/_6 = {}^{25}/_{36}$. Если я подброшу игральную кость четыре раза, вероятность того, что я ни разу не получу шестерку, равна $^{25}/_{36} \cdot {}^{25}/_{36} = {}^{625}/_{1296}$. Таким образом, мы получили ответ на первый вопрос шевалье де Мере.

ВТОРОЕ ПИСЬМО

Париж, 6 ноября 1654 года
Г-ну Пьеру Ферма, Орлеан

Предположим, что мы неоднократно проводим опыт в одних и тех же условиях; тогда число опытов, в которых произойдет определенное событие *E*, можно назвать частотой события *E*, а отношение частоты к числу всех опытов (при которых мы наблюдаем за появлением и непоявлением события *E*) — *относительной частотой E*. Те, кто не раз играл в азартные игры, знают, что относительная частота любых событий при многократном повторении игр, близка к вполне определенному числу; более того, отклонение относительной частоты от его вероятности тем меньше, чем дольше длится игра. Например, при игре в кости относительная частота появления шестерки при стократном бросании кости будет близка к $^1/_6$ (если кость правильная) или к другому числу (если кость неправильная). Вероятность выпадения каждой из сторон неправильной кости можно приближенно определить — для этого имеется лишь единственный, только что описанный дуть. В принципе на этом пути указанные вероятности можно определить с любой точностью;' практически же, однако, эту точность нельзя увеличивать безгранично: во-первых, на это потребовалось бы очень много времени и, во-вторых, сама кость изнашивалась бы в процессе опытов.

Вероятность – есть та неподвижная точка, вокруг которой случайным, непредсказуемым образом колеблется относительная частота, но в своих капризных изменениях она, как правило, будет отклоняться от вероятности лишь незначительно. В то время как вероятность некоторого случайного события является вполне определенным числом (хотя, возможно, и не известным нам точно), которое не зависит от случая, частота того же случайного события является числом неопределенным, зависящим от случая. Наблюдение относительной частоты можно рассматривать как способ измерения вероятности. Это измерение позволяет получить неточное значение (как, впрочем, и любое другое измерение), но неточность измерения можно произвольно уменьшить за счет увеличения числа наблюдений.

ТРЕТЬЕ ПИСЬМО

Париж, 8 ноября 1654 года
Г-ну Пьеру Ферма, Орлеан

Рассмотрим колоду, состоящую из 16 карт и содержащую по четыре карты — туз, король, дама и валет — каждой масти (пики, черви, трефы н бубны). Тогда вероятность того, что сначала мы вытянем короля, составит $^1/_4$. Если после первого раза мы не возвращаем вынутую карту, то вероятность вытянуть короля как в первый, так и во второй раз уже будет равна не $^1/_4 \cdot {}^1/_4 = {}^1/_{16}$, а только $^1/_{20}$. Действительно, если после первого извлечения мы не возвращаем вынутую карту в колоду и при этом вынутым оказался король, то при втором извлечении в колоде остаются уже 15 карт и среди них лишь три короля. Тем самым вероятность извлечения короля во второй раз оказывается равной $^3/_{15}$, то есть $^1/_5$. Но тогда, согласно теореме умножения, искомая вероятность составит $^1/_4 \cdot {}^1/_4 = {}^1/_{20}$.

Общая и корректная формулировка теоремы умножения сводится к следующему: вероятность того, что события А и В осуществятся, равна произведению вероятности события А на вероятность события В, причем последняя вероятность вычисляется при условии, что событие А осуществилось. Это последнее значение я называю *условной вероятностью* В при условии А. В том случае, когда события А и В независимы, теорему умножения вероятностей можно сформулировать, не прибегая к понятию условной вероятности. При этом мы можем прямо утверждать: вероятность того, что наступят оба события А и В, равна произведению вероятностей каждого из этих событий в отдельности. Это произойдет, если события А и В, например, касаются выпадения числа очков на разных костях.

ЧЕТВЕРТОЕ ПИСЬМО

Париж, 19 ноября 1654 года
Г-ну Пьеру Ферма, Тулуза

Это письмо рассказывает о диалоге Паскаля с его другом Дамьеном Митоном.

Паскаль. Существуют случайные события, наступление которых можно наблюдать лишь раз, поскольку наблюдать их в подобных же условиях более невозможно. Такие случайные события я называю *однократными случайными событиями*.

Митон. В этом случае определить вероятность эмпирическим путем, то есть посредством наблюдения относительной частоты, невозможно. Так обстоит дело со скачками. Можно утверждать, что одна из лошадей выиграет с некоторой вероятностью. Зрители на скачках имеют об этом достаточно определенное мнение и именно поэтому заключают между собой пари об их исходе. Однако я замечал, что обычно мнения зрителей сильно расходятся в зависимости от той информации о лошадях, которой они располагают. На основании этого я заключаю, что люди по-разному оценивают вероятность одного и тога же события, и я не вижу оснований, позволяющих судить, кто же из них прав. Вы, г-н Паскаль, определили вероятность события как степень уверенности в его наступлении. Мне кажется целесообразным изменить это определение так: вероятность данного случайного события для каждого человека имеет свое значение, поскольку она выражает степень его уверенности в наступлении данного события.

Паскаль. В этом я не могу с вами согласиться; я считаю, что вероятность случайного события не зависит от нашего суждения о ней, она представляет собой некое число, значение которого разными лицами оценивается по-разному. Если кто-либо на скачках посоветует мне поставить на определенную лошадь и эта лошадь и в самом деле выиграет, то это вовсе еще не означает, что мой советчик правильно судил об ожидаемом исходе скачек. Однако, если его советы в большинстве случаев, скажем в $^9/_{10}$, удачны, а советы другого удачны лишь в $^1/_{10}$ части случаев, не кажется ли вам, что к первому советчику следует прислушаться, а советами второго пренебречь?

Митон. Я признаю, что вы весьма ловко меня обошли, хотя, собственно говоря, вы имеете в виду вероятность совершенно другого события, а именно вероятность того, что знаток скачек даст правильный совет. Но при этом речь идет уже не об однократном случайном событии, а о событии, которое можно повторить много раз и тем самым оценить его вероятность на основании наблюдения относительной частоты. Я убежден, что любая вероятность субъективна; если же вы полагаете, что это не так, что разумно говорить об объективной вероятности, то и докажите мне свою правоту.

Паскаль. Я охотно признаю, что не сумею этого доказать. Это аксиома. Пожалуй, вас удивит, если я скажу, что аксиома об объективной вероятности является естественным и само собой разумеющимся следствием аксиомы причинности, согласно которой в природе течение явлений точно определено совокупностью факторов, оказывающих на них влияние, и одинаковые причины всегда приводят к одинаковым следствиям. Этого нельзя доказать, и именно поэтому она основополагающая.[1]

Дополнения от Альфреда Реньи

В связи с эпистолярной формой этой книги мне хотелось бы сообщить о том, что приведенных писем Паскаль в действительности не писал.[2]

Краткая биография. Блез Паскаль родился в Клермон-Ферране 19 июня 1623 года. Его отец, председатель финансово-судебной палаты, был человеком обширных и глубоких знаний. Блез очень рано, в трехлетнем возрасте, потерял мать — Антуанетту Бегон. Паскаль не учился ни в школе, ни в университете, образование ему дал сам отец. Уже в отрочестве Блез обнаружил необыкновенный талант: когда ему было всего 16 лет, он написал трактат «Опыт теории конических сечений». В 1642 году, когда Паскалю исполнилось 19 лет, он сконструировал счетную машину. В 1648 году Паскаль повторил во многих вариантах опыт Торричелли и дал полное объяснение полученных результатов. Он доказал, что давление воздуха зависит от высоты, отсчитываемой от уровня моря, открыл основной закон гидродинамики и принцип устройства гидравлического пресса.

В 1653 году со своими знатными друзьями — герцогом Роаннским, шевалье де Мере и Дамьеном Митоном — Паскаль ездил в Пуату. Во время этого путешествия де Мере задал Паскалю два вопроса об азартных играх. Именно они легли в основу переписки Паскаля с Ферма, в ходе которой и зародилась теория вероятностей. Первое письмо Паскаля датируется 29 июля 1654 года, второе – 24 августа и третье (всего несколько строк) – 27 октября 1654 года. Письма посвящены двум вопросам шевалье де Мере. Первый вопрос состоит в следующем: сколько раз надо бросить две игральные кости, чтобы вероятность выпадения двух шестерок была больше половины? Эту задачу де Мере решил сам. Второй его вопрос потруднее, и ответить на него самостоятельно шевалье не смог. Вопрос заключается в следующем. Два игрока играют в азартную игру; в каждой партии шансы на выигрыш у них одинаковы; в начале игры ставки одинаковы; ставку выигрывает тот, кто первым наберет n выигранных партий. Как следует разделить ставку, если по какой-то причине игра прервана в тот момент, когда один игрок выиграл a партий, а другой b партий?

На тот же 1654 год приходятся работы Паскаля о так называемом «треугольнике Паскаля» и связанных с ним вопросах комбинаторики. Интерес к комбинаторике был вызван теоретико-вероятностными исследованиями ученого. Вскоре после написания этих трех писем, а именно 23 ноября 1654 года, произошел решительный поворот в жизни Паскаля, который биографы называют «вторым обращением к вере». В духовном мире Паскаля религия играла большую роль. Записки, сделанные им той знаменательной ночью в порыве религиозного экстаза, с тех пор он носил с собой в качестве памятки, зашив их в подкладку камзола.

Паскаль вступил в теологическую борьбу с иезуитами. Он написал 19 полных блеска и остроумия писем, известных под названием «Письма провинциала» и являющихся шедевром французской художественной прозы. Утверждение, что после своего «второго обращения к вере» он полностью отошел от математики и науки вообще, ошибочно. Именно к 1658—1659 годам относятся его исследования циклоиды, имеющие исключительно большое значение: Паскаль определил площадь циклоиды. Тем самым он сделал решительный шаг к созданию дифференциального и интегрального исчислений. И хотя он удовлетворился тем, что применил свое открытие к вычислению определенных интегралов, связанных с циклоидой, но и в этом уже содержались черты общего

---

[1] В споре об объективности или субъективности вероятности главную роль играет так называемый байесовский метод (подробнее см. Идеи Байеса для менеджеров).

[2] Здесь я понял, что прокололся)) Я поискал в Интернете оригинальную переписку, и не нашел ее. Есть лишь упоминание о ней в литературе по истории математики; см. ниже. – *Прим. Багузина.*

метода, позднее развитого Лейбницем. Умер Паскаль в 1662 г. в возрасте 39 лет после мучительной продолжительной болезни((.

Об истории теории вероятностей. Теория вероятностей — сравнительно молодая ветвь математики. Ее развитие как самостоятельной науки началось с переписки Паскаля и Ферма в 1654 году, хотя значительно раньше этих ученых многие математики занимались задачами, относящимися к азартным играм. Так, например, Лука Пачоли (1445–1514) в своей книге «Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni e Proportionalita» рассматривал одну задачу о вероятностях, но пришел к ошибочному решению. Однако уже Кардано (1501–1576) и Галилей (1564–1642) правильно решали отдельные теоретико-вероятностные задачи.

В 1658 году появилась книга Христиана Гюйгенса (1629–1695) «О расчетах в азартных играх» («De ra tionijs in ludo aleae»), в которой давалось подробное изложение вопросов, рассмотренных Ферма и Паскалем (автор явно опирался на переписку этих двух ученых), но, кроме того, им было выдвинуто и много аналогичных вопросов. С работой Гюйгенса непосредственно связана основная работа Якоба Бернулли (1654–1705) «Искусство догадок» («Ars conjectandi»), которая была опубликована лишь после его смерти в 1713 году. В первой части своего труда Бернулли воспроизводит и комментирует книгу Гюйгенса, приводит полные решения тех вопросов, которые Гюйгенс поставил, но не решил. Однако важнейшей частью книги является четвертая, в которой изложен закон больших чисел. Произведение Монморта (1678–1719) «Опыт анализа азартных игр» («Essai d'analyse sur les jeux de hazard»), написанное несколько позже, чем «Искусство догадок» Бернулли, появилось раньше (в 1708 году). Оно также опирается на книгу Гюйгенса и тем самым косвенно связано с перепиской Паскаля и Ферма. То же можно сказать и относительно важнейшей работы Абрахама де Муавра (1667–1754) «Об измерении случайности, или вероятностях результатов в азартных играх» («De mensura sortis seu de probabilitate eventuum in ludis a casu fortuito penden tibus»), которая была опубликована в журнале Philosophical Transactions в 1711 году.

Наряду с задачами азартных игр уже в самом начале возникновения теории вероятностей появились задачи, связанные с составлением таблиц смертности и вопросами страхования. В Лондоне уже с 1592 года велись точные записи о смертности. На основе этих записей Джон Граун (1620–1674) в 1662 году впервые составил таблицы вероятности смерти как функции возраста. Несколькими годами позднее Ван Худде и Ван Витт в Голландии, проделав аналогичные расчеты, использовали их для вычисления пожизненной ренты. Подробнее эти вопросы в 1693 году были изложены Галлеем.

О математических основах вероятности. Определение вероятности встречается впервые в «Ars conjectandi» Якоба Бернулли. Согласно Бернулли, вероятность есть «степень уверенности и относится к достоверности как часть к целому». Хотя это определение имеет скорее философский, чем математический, характер, Бернулли дает в основных чертах и так называемое классическое определение вероятности: «...вероятность события есть отношение числа благоприятствующих случаев к числу всех возможных случаев, причем все случаи предполагаются равновозможными». Правда, Бернулли говорит об этом несколько по-иному: приведенная же формулировка принадлежит Лапласу (1749–1827). Она дается в его основополагающем труде «Аналитическая теория вероятностей».

В XIX веке математика и понятие математической строгости значительно преобразились; возникли современные концепции математики и ее отношения к реальности. Согласно этим представлениям, каждая ветвь математики должна быть построена аксиоматически, абстрагирована от ее реального происхождения. Теория вероятностей удивительно долго, вплоть до первых десятилетий XX. века, стояла в стороне от указанной грандиозной перестройки. На вредность подобного отставания еще в 1900 году указал Давид Гильберт. Он включил проблему аксиоматического обоснования теории вероятностей – и тем самым способствовал ее подъему на уровень математики XX века — в составленный им список важнейших проблем математики.

Построение теории вероятностей в духе современной математики, основанное на точном аксиоматическом фундаменте, впервые вполне удовлетворительным образом было осуществлено в 1933 году А.Н. Колмогоровым (1903–1987).

Об оригинальных письмах Паскаля и Ферма. До середины XVII в. в теории вероятностей не было никакого общего метода решения задач, не говоря уже о цельной математической теории. Умели только решать отдельные задачи, но был собрал уже довольно обширный материал в различных областях человеческой деятельности. В середине XVII в. в разработку вопросов теории вероятностей были вовлечены крупнейшие ученые, в первую очередь Паскаль, Ферма и Гюйгенс.[3]

В 1654 г. между Паскалем и Ферма возникла переписка по поводу ряда задач, в том числе и о разделении ставки. В этой переписке оба они, хотя и несколько разными путями, приходят к верному решению этой задачи. При решении они выработали вероятностный подход, деля ставку пропорционально вероятности выиграть всю ставку, если игра будет продолжена.

Метод решения Ферма можно установить из письма Паскаля к нему от 24 августа 1654 г. Письмо Ферма, в котором он излагает свой способ решении, не сохранилось. Решалась следующая задача. Пусть до выигрыша всей встречи игроку A недостает двух партий, а игроку B — трех партий. Как справедливо разделить ставку, если игра прервана?

Рис. 1. Портрет молодого Блеза Паскаля

Ферма рассуждает следующим образом. Игра может продолжаться максимально еще четыре партии. Как могут протекать эти партии? Ферма составляет следующую таблицу, где выигрыш партии для A обозначается знаком «плюс» а для B — знаком «минус».

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
+	+	+	+	−	+	+	−	+	−	−	−	−	−	+	−
+	+	+	−	+	+	−	+	−	+	−	−	−	+	−	−
+	+	−	+	+	−	+	+	−	−	+	−	+	−	−	−
+	−	+	+	+	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−

Рис. 2. Возможные варианты окончания игры

Из 16 возможных, первые 11 исходов благоприятны для выигрыша A всей встречи, а для выигрыша B благоприятны только 5 последних исходов. Следовательно, $^{11}/_{16}$ ставки должен получить A, а B должен получить $^{5}/_{16}$. Здесь наглядно видно, что Ферма предлагает разделить ставку пропорционально вероятности выигрыша всей встречи (с нею и всей ставки).

---

[3] По материалам ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ С ДРЕВНЕЙШИХ ВРЕМЁН ДО НАЧАЛА XIX СТОЛЕТИЯ Под редакцией А. П. Юшкевича. М.: Наука, 1970. 302 с. Глава. 5. КОМБИНАТОРИКА И ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ (Л. Е. Майстров, Б. А. Розенфельд, О. Б. Шейнин)

Паскаль решает задачу о разделении ставки на основе изучения свойств таблицы биномиальных коэффициентов, приведенной в его «Трактате об арифметическом треугольнике». Он складывает количество партий, недостающих игрокам А и В, и берет ту строку таблицы, в которой количество членов равно найденной сумме. Тогда доля игрока А будет равна сумме членов найденной строки начиная от 1, причем количество слагаемых равно числу партий, недостающих игроку В, а доля игрока В равна такой же сумме, но с количеством слагаемых, равным числу партий, недостающих игроку А. Например, игроку А недостает две партии, а игроку В — три (рис. 3).

0:	1														
1:	1	1													
2:	1	2	1												
3:	1	3	3	1											
4:	1	4	6	4	1										
5:	1	5	10	10	5	1									
6:	1	6	15	20	15	6	1								
7:	1	7	21	35	35	21	7	1							
8:	1	8	28	56	70	56	28	8	1						
9:	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1					
10:	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1				
11:	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1			
12:	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1		
13:	1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13	1	
14:	1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364	91	14	1

Рис. 3. Треугольник Паскаля

2 + 3 = 5. Выписываем строку, в которой находится пять чисел: 1, 4, 6, 4, 1. Доля игрока А будет 1 + 4 + 6 = 11, а доля В = 1 + 4 = 5. Следовательно, ставку нужно разделить в отношении $^{5}/_{11}$. При таком решении ставка делится пропорционально вероятностям выиграть всю ставку для игроков А и В.

Паскаль предполагал натесать книгу «Математика случая», очевидно имея в виду систематизировать полученные им самим и Ферма результаты.

Литература на русском языке

Паскаль Б. Письма к провинциалу. — СПб.: 1898.

Паскаль Б. Мысли. 3-е изд. — М.: 1905.

Монтень. Опыты. Пер. В. П. Глебовой. — СПб.: 1891.

Лукреций. О природе вещей. Пер. с лат. Ф. А. Петровского. — М.: Изд. АН ССР, 1946.

Платон. Тимей. — В кн.: Сочинения, переведенные с греческого и объясненные Карповым. — 2-е изд., СПб.: 1863—1879.

Декарт Р. Правила для руководства ума. — В кн.: Избранные произведения. — М.: Госполитиздат, 1950.

Цицерон. Письма. В 3-х томах. — М.: Изд. АН СССР, 1949— 1951.

Цицерон. Речи. В 2-х томах. — М.: Изд. АН СССР, 1962.

Мизес Р. Вероятность и статистика. Пер. с нем.— М.: ОНТИ, 1936.

Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей. — М.: Наука, 1974.

Борель Э. Вероятность и достоверность. Пер. с фр. – 3-е изд. — М.: Наука, 1969.

Пойа Г. Математика и правдоподобные рассуждения. — В кн.: Индукция и аналогия в математике. — М., ИЛ, 1957.

Лаплас П. Опыт философии теории вероятностей. — М.: 1908.