Тони Крилли. Математика. 50 идей, о которых нужно знать

Всю математику не под силу знать никому, она слишком многообразна, но основные идеи, что определили и определяют нашу жизнь, надо знать всем. Книга «Математика» выходит в серии «50 идей, о которых нужно знать». Вот некоторые идеи, изложенные в книге: системы чисел, числа Фибоначчи, треугольник Паскаля, фракталы, хаос, теория Байеса, кривая нормального распределения, шифры, теория игр, великая теорема Ферма…

Книгу к прочтению мне рекомендовал Мартин.

Тони Крилли. Математика. 50 идей, о которых нужно знать. М.: Фантом Пресс, 2014. – 208 с.

Купить цифровую книгу в ЛитРес, бумажную книгу в Ozon или Лабиринте

Нуль

Применять символ, обозначающий «ничто», начали, как принято считать, тысячи лет назад. Впервые нуль среди чисел ввел индийский математик VII века Брахмагупта. На Западе индо-арабскую систему чисел, включавшую нуль как число, распространил Леонардо Пизанский — Фибоначчи; ей он посвятил свой труд 1202 года «Liber Abaci» («Книга абака»; абаком Фибоначчи называл арифметические вычисления). В десятичной системе нуль служит символом-заполнителем и позволяет нам оперировать и огромными числами, и ничтожно малыми.

Системы чисел

Шумеры и вавилоняне около 4000 лет назад, применяли в быту позиционную систему счисления. Мы называем ее так, потому что она позволяла определять «число» по расположению символов. Единицей счисления они полагали 60.

Основные символы, применявшиеся римлянами, — «десятки» (I, X, C и M) и их «половины» (V, L и D). Числа в римской системе составлялись по принципу «перед и после». Например, значение MMMCDXLIIII становится понятно только после мысленной расстановки скобок: (MMM)(CD)(XL)(IIII), и тогда можно прочесть это число как 3000 + 400 + 40 + 4 = 3444.

Современный позиционный десятичный метод обозначения пришел к нам из Вавилона, а потом его усовершенствовали индийцы. Преимущество этого метода — возможность обозначать как очень маленькие, так и громадные числа.

Дроби

Математики называют дроби «рациональными числами», потому что они суть соотношение (ratio) двух чисел. Рациональные числа древние греки называли «мерами». Египтяне во втором тысячелетии до нашей эры основывали свою систему дробей на иероглифах, обозначающих доли единит, т.е. дроби с числителем, равным 1. Например, 5/7 – не доля единицы, но может быть записана в долях единицы:

$$\frac{5}{7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{168}$$

Число π

π — есть длина окружности, деленная на диаметр. Архимед Сиракузский в 250 г. до н.э. аппроксимирует π как 22/7. Фердинанд фон Линдеманн в 1882 году продемонстрировал, что π — трансцендентно, т.е. не может быть решением алгебраического уравнения (корнем многочлена с целыми коэффициентами). Линдеманн закрыл вопрос «квадратуры круга». Задача состояла в том, чтобы для предложенного круга выстроить квадрат той же площади. Линдеманн доказал, что это проделать невозможно. Ныне «решение задачи квадратуры круга» — эвфемизм, обозначающий невыполнимое, безнадежное дело.

Существует мнемоническое правило, помогающее запомнить несколько знаков в формуле числа π: «Как я хочу и желаю надраться до чертей после сих тупых вопросов, наводящих тяжелую депрессию!»

Число *e*

е — число, округленно равное 2,71828. Вообразите годичный интервал времени, ставку кредитования в 100% и стартовый капитал в 1 фунт. В конце года у нас будут 2 фунта. Теперь предположим, что кредитная ставка стала вдвое меньше, т.е. 50%, но рассчитывается каждые полгода отдельно. В первые полгода мы заработаем 50 пенсов, к концу первого полугодия общий капитал при этом составит 1,5 фунта. Тогда к концу года у нас на руках окажется эта сумма плюс еще 75 пенсов дохода. Итого наше стартовое вложение в 1 фунт выросло к концу года до 2,25 фунта!

Будет ли наш капитал расти бесконечно? Если продолжим дробить год на все меньшие периоды (рис. 1), мы увидим, что «в пределе» суммарное количество заработанных денег устремляется к постоянной величине — числу *e*.

Капитализируем каждый…	Общая сумма, фунтов
год	2,00000
полгода	2,25000
квартал	2,44141
месяц	2,61304
неделю	2,69260
день	2,71457
час	2,71813
минуту	2,71828
секунду	2,71828

Рис. 1. Число *e*

Точное значение *e* можно представить формулой

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} \dots$$

Место обитания *e* — разнообразный рост чего угодно, например, экономический рост и рост населения. Кривые, описывающие процесс радиоактивного распада, также связаны с этой константой. В статистике знаменитая «колоколообразная» кривая тоже не обходится без *e* (подробнее см. Нормальное распределение):

$$f(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \ e^{\frac{1}{2}(\frac{X-\mu}{\sigma})^2}$$

Числа Фибоначчи

Подробнее см. Альфред Реньи. Числа Фибоначчи

Золотые пропорции

Возьмем лист бумаги А4, 210 мм по короткой стороне и 297 мм — по длинной, соотношение сторон 297/210, что приблизительно равно 1,4142. Формула, определяющая размеры бумаг А, придает этим размерам крайне полезное качество, которого нет у бумаг произвольного размера. Если бумажный лист скроен по системе А, то его сложением пополам мы получаем два прямоугольника меньшего размера, пропорциональных большему (рис. 2).

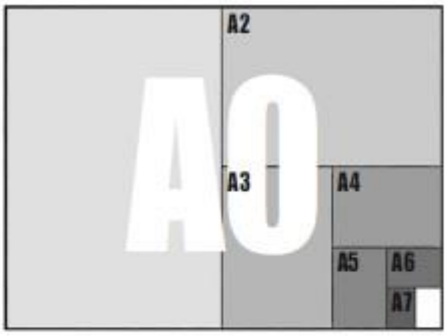

Рис. 2. Бумага формата А

Как мы узнали, что именно соотношение 1,4142 даст нам такое замечательное свойство? Сложим лист бумаги, но на этот раз возьмем такой, в котором мы не знаем длину большей стороны. Допустим, ширина прямоугольника равна 1, а длину запишем как *x*, тогда соотношение длины к ширине получится *x*/1. Теперь сложим этот прямоугольник пополам, и тогда соотношение длины к ширине — 1/½x, или 2/x. Суть размеров в системе А в том, что эти два соотношения должны равняться одному и тому же числу, и поэтому получаем уравнение x/1 = 2/x, откуда $x^2 = 2$. Таким образом, значение $x = \sqrt{2}$, что примерно равно 1,4142.

Золотой прямоугольник складывается по линии RS (рис. 3) так, чтобы фигура MRSQ была квадратом. Ключевое свойство золотого прямоугольника в том, что прямоугольник RNPS пропорционален исходному прямоугольнику, т.е. после выделения квадрата оставшийся прямоугольник должен быть мини-репликой большого.

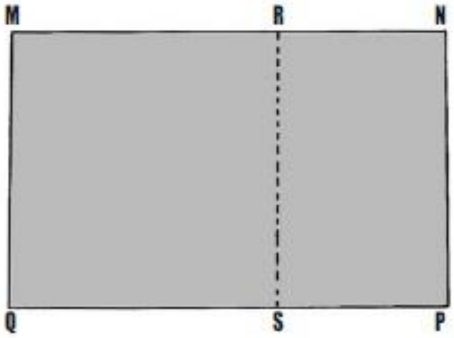

Рис. 3. Золотой прямоугольник

Как и ранее, установим, ширина большого прямоугольника MQ = MR и равна 1, а длину большей стороны MN обозначим как x. Соотношение длины к ширине большого прямоугольника, как и в предыдущем случае, — x/1. На этот раз ширина меньшего прямоугольника RNPS есть MN – MR, т.е. x – 1, и тогда соотношение сторон этого прямоугольника равно 1/(x – 1). Приравняв оба соотношения, получим уравнение:

$$\frac{\mathrm{x}}{1} = \frac{1}{\mathrm{x}-1} \text{ или } \mathrm{x}^2 - \mathrm{x} - 1 = 0$$

Корни квадратного уравнения:

$$\mathrm{x}_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\cdot 1\cdot(-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Смысл имеет лишь корень со знаком плюс. Это число и есть знаменитое золотое сечение, обозначаемое греческой буквой «фи» — ф:

$$\phi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = 1{,}6180339887 \ldots$$

Треугольник Паскаля

Треугольник Паскаля знаменит в математике своей симметричностью и скрытыми взаимоотношениями между числами в нем. Треугольник Паскаля строится сверху вниз. Расположим в вершине 1 и разместим по единице слева и справа в следующем ряду. Дальнейшие ряды строим, всякий раз вписывая единицы по краям, а внутри ряда числа образуются путем сложения тех, что расположены выше уровнем правее и левее от искомой (рис. 4). Если сложить числа в любом ряду треугольника Паскаля, получится степень 2. Например, в пятом ряду 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4.

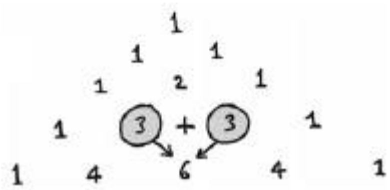

Рис. 4. Треугольник Паскаля

Первое и самое очевидное свойство треугольника Паскаля — в его симметрии. Если провести вертикальную линию через середину, левая и правая его половины окажутся «зеркально симметричны». Благодаря этому можно говорить и о «диагоналях» этого треугольника, поскольку северо-восточная диагональ будет идентична северо-западной. Под диагональю из одних единиц увидим диагональ натуральных чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., а ниже — треугольных чисел 1, 3, 6, 10, 15, 21, ... (числа, которые можно собрать в треугольники из точек). Далее — диагональ тетраэдрических чисел: 1, 4, 10, 20, 35, ... Эти числа можно организовать в тетраэдры («трехмерные треугольники» или, если угодно, в горки пушечных ядер сложенные так, чтобы в основании был треугольник).

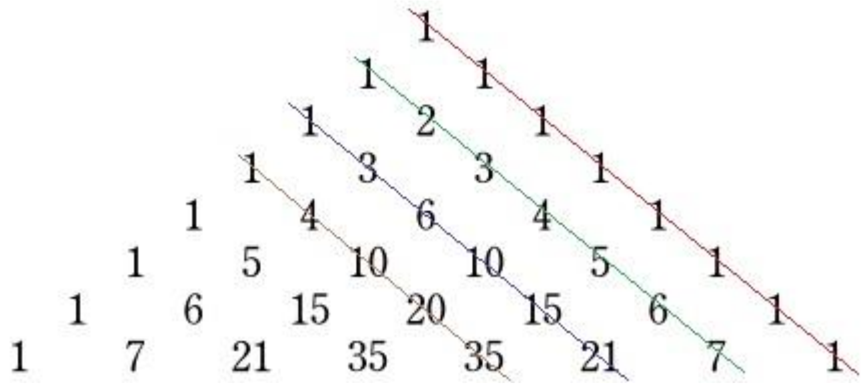

Рис. 5. Диагонали треугольника Паскаля

В треугольнике Паскаля можно заметить узоры из чисел — в зависимости от того, четные они или нечетные. Если заменить единицами четные числа, а нулями — нечетные, получится узор (рис. 6а), похожий на замечательный фрактал, известный как треугольник («салфетка») Серпинского (рис. 6б).

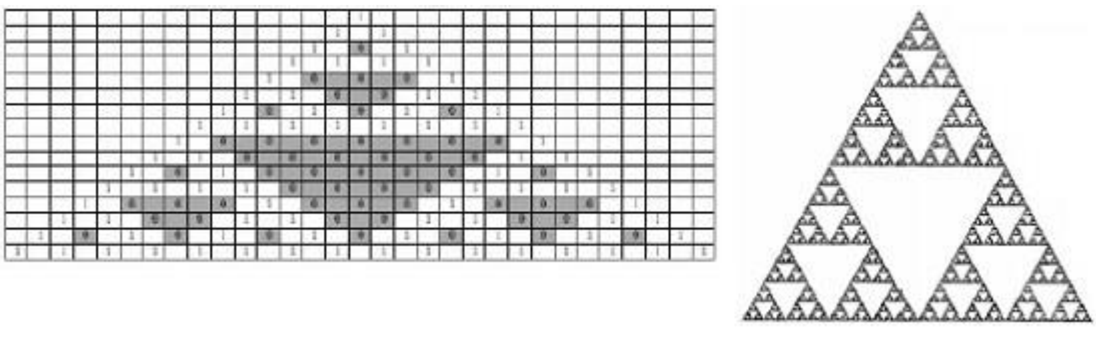

Рис. 6. Фрактальные свойства треугольника Паскаля

Алгебра

Математика пережила серьезные перемены, перейдя от арифметики к науке символов — алгебре. Алгебра была заметной частью трудов арабских мыслителей IX века. Аль-Хорезми написал учебник математики, содержавший арабское слово «ал-джабр». Решая практические задачи в терминах линейных и квадратных уравнений, Аль- Хорезми назвал «науку уравнений» словом, от которого происходит «алгебра».

Величайшая работа Джироламо Кардано по математике, опубликованная в 1545 году, стала поворотной точкой в теории уравнений – она оказалась богата на решения уравнений третьей и четвертой степеней, т.е. содержащих x^3 и x^4 (подробнее см. [Джироламо Кардано. О моей жизни](#)).

На протяжении 500 лет алгеброй обозначали «теорию уравнений», но в XIX веке дело приобрело новый оборот. Люди осознали, что символы алгебры могут представлять далеко не только числа, а и «высказывания», а значит, алгебра может быть связана с логикой.

Алгоритм Евклида

Допустим, нам нужно найти наибольший общий делитель (НОД) двух целых чисел 18 и 84. Сначала мы разбили оба числа на их делители: 18 = 2 x 3 x 3 и 84 = 2 x 2 x 3 x 7. А затем отбираем только общие. В нашем примере – 2 и 3. Итого получаем НОД = 2 x 3 = 6. А можно ли как-то избежать этой возни с делителями? Такой путь есть. Алгоритм Евклида приводится в «Началах», книга VII, предложение 2: «Даны два числа, не кратные друг другу; найти их наибольшую общую меру».

Алгоритм Евклида элегантен, эффективен и позволяет легко избежать усилий по выявлению всех делителей простым отбрасыванием. Давайте посмотрим, как он работает. Задача — найти d = НОД(18, 84). Начнем с деления 84 на 18. Нацело разделить не получится — выйдет 4 и 12 в остатке:

84 = 4 x 18 + 12.

Поскольку d должно делить и 84 и 18, оно должно делить и 12. Значит, d = НОД(12, 18). Повторим процесс деления — теперь 18 на 12:

18 = 1 x 12 + 6.

Получим в остатке 6, следовательно, d = НОД(6, 12). 12 делится на 6 без остатка, а d = НОД(0, 6). 6 — наибольшее число, на которое делятся и 6, и 0, вот мы и получили ответ.

Если вычислить таким способом d = НОД(17640, 54054), последовательно получим остатки от деления 1134, 630, 504 и 0, ответ d = 126.

Логика

Подробнее см. Булева логика.

Традиционная логика основывалась на множествах или группах данных: мы оперировали множествами спаниелей, собак, объектов коричневого цвета. В этих случаях у нас нет сомнений в том, что входит в множество, а что — нет. Если нам попадется чистокровный родезийский риджбек, мы наверняка сразу поймем, что это животное точно не из множества спаниелей.

Теория нечетких множеств имеет дело с множествами, не определенными точно. Положим, у нас есть множество толстых спаниелей. Насколько толстым должен быть спаниель, чтобы мы включили его в это множество? Нечеткие множества допускают градации членства, и границы, отделяющие членов множества от всех остальных объектов, размыты. Математика позволяет нам точно определять размытость.

Множества

Николя Бурбаки — псевдоним группы французских ученых, пожелавших «правильно» переписать математику от самого истока. Их смелое заявление состояло в том, что все должно базироваться на теории множеств. Аксиоматический подход был принят ими за основной, и все в написанных ими книгах придерживалось математической строгости «определение, теорема, доказательство».

Британский философ Бертран Расселл сформулировал концепцию множества S, включающего в себя все множества, которые не включают самих себя. Символически это записывается так: $S = \{x: x \notin x\}$. Далее Расселл задает вопрос: $S \in S$ — верно ли это? Если да, то S в таком случае должно удовлетворять утверждению о том, что само оно не содержит себя, т.е. $S \notin S$.

С другой стороны, если нет, то $S \notin S$, а значит, S не соответствует определяющему утверждению $S = \{x: x \notin x\}$, а значит $S \in S$. Суть парадокса Расселла сводится к следующему: $S \in S$ тогда и только тогда, когда $S \notin S$. У этого парадокса есть и другое название — «парадокс брадобрея»: сельский брадобрей объявляет, что будет брить всякого, кто сам не бреется, и не брить того, кто бреется сам. Вопрос: кто побреет брадобрея? Если он сам не бреется, то должен брить сам себя, а если бреется сам, то не должен себя брить.

Подобных парадоксов, вежливо называемых «антиномиями», следует избегать. Для математиков недопустимо иметь дело с системами, производящими противоречия. Расселл развил теорию типов и в ней создал позволение a ∈ A лишь при условии, что a — объект низшего по отношению к A порядка, тогда удастся избежать выражений вроде S ∈ S.

Австрийский математик Курт Гёдель нокаутировал желающих удрать от парадоксов в формальные аксиоматические системы. В 1931 году Гёдель доказал, что даже в простейших формальных системах существуют утверждения, истинность или ложность которых не может быть выведена в рамках данной системы. Попросту говоря, существуют утверждения, до которых аксиомы данной системы не могут добраться, т. е. невыводимые утверждения. Поэтому теорема Гёделя и называется «теоремой о неполноте» (подробнее см. Эрнест Нагель, Джеймс Рой Ньюмен. Теорема Гёделя).

Исчисление

Исчисление — способ произведения расчетов, и математики иногда поминают «логическое исчисление», «вероятностное исчисление» и т.п. Исчисление — центральный принцип математики. Мало кто из ученых, инженеров или экономистов не сталкивался с исчислением, столь широки его области применения. Исторически его ассоциируют с Исааком Ньютоном и Готфридом Лейбницем, произведшими в XVII веке первые изыскания в математическом анализе. У обоих возникли похожие теории, и даже случился спор, кому принадлежит право первопроходца математического анализа. На самом деле оба ученых пришли к своим выводам независимо друг от друга, и методы их довольно сильно различались.

Основные виды исчислений: дифференциальное и интегральное. Грубо говоря, дифференцирование связано с измерением изменения, а интегрирование — с измерением площади, но жемчужина в короне матанализа есть факт их единства.

Вообразите, что мы стоим на мосту над глубоким ущельем и собираемся бросить вниз камень. Точная формула, соединяющая пройденный камнем путь y и время x, потребное для прохождения этого пути, была предложена Галилео Галилеем: $y = 16*x^2$ (коэффициент 16 возникает потому, что измерения проводятся в футах и секундах). При этом скорость в момент времени x: $v = 16*2x$. Таков эффект дифференцирования — переход от $u = x^2$ к производной $\mathring{u} = 2x$. Ньютон называл $\mathring{u} = 2x$ «флюксией», а переменную x — флюентой, потому что мыслил в терминах текучих материй. Ныне мы часто записываем функцию $u = x^2$, а ее производную как $du/dx = 2x$. Такая запись была предложена Лейбницем и сохранилась в этом виде, утвердив превосходство «d»-изма над точками Ньютона.

В общем случае производная получается умножением на степень исходной функции и уменьшением степени исходной функции на единицу (если функция — многочлен; рис. 7).

u	du/dx
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^4	$4x^3$
x^5	$5x^4$
...	...
x^n	nx^{n-1}

Рис. 7. Производные функций

Исторически первое применение интегрирования — измерение площадей (рис. 8). Измерение площади поверхности под кривой можно произвести аппроксимированием ее прямоугольными фрагментами, каждый из которых имеет ширину dx. Измеряя площадь каждого такого прямоугольника и складывая их вместе, получим «сумму» их площадей, которая и равна общей площади. Символ S обозначает сумму и был введен Лейбницем в вытянутом виде — ∫. Площадь каждого прямоугольника равна udx, и тогда площадь A под кривой от 0 до x:

$$A = \int_0^x u dx$$

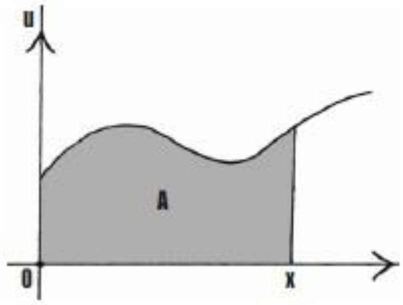

Рис. 8. Применение интегрирования для измерения площади фигуры

Как и в случае с производными, у интегральных функций есть закономерности степеней x (рис. 9). Если дифференцировать интеграл A = $x^3/3$, получим исходное u = x^2. Если интегрировать производную du/dx = 2x, тоже получим исходное u = x^2. Дифференцирование обратно интегрированию, и это наблюдение известно, как основная теорема математического анализа и является одной из важнейших в математике вообще.

u	$\int_0^x u\,dx$
x^2	$x^3/3$
x^3	$x^4/4$
x^4	$x^5/5$
x^5	$x^6/6$
...	...
x^n	$x^{n+1}/(n+1)$

Рис. 9. Интегралы функций

Треугольники

Величайшей теоремой о треугольниках является, конечно, теорема Пифагора – она по-прежнему существует под этим названием в современной математике, хотя есть некоторые сомнения, что именно Пифагор первым сделал это открытие. памяти. Существуют сотни доказательств этой теоремы. Вариант в духе Бхаскары II (XII век) популярнее Евклидова (300 до н. э.). Это доказательство – «без слов». На рисунке квадрат со стороной a + b можно разделить двумя способами (рис. 10: вверху слева или справа). Поскольку четыре равных треугольника (выделены тёмно-серым) одинаковы в обоих квадратах, их можно изъять без изменения оставшихся площадей. Взглянем на площади оставшихся фигур —увидим знакомое выражение: $a^2 + b^2 = c^2$.

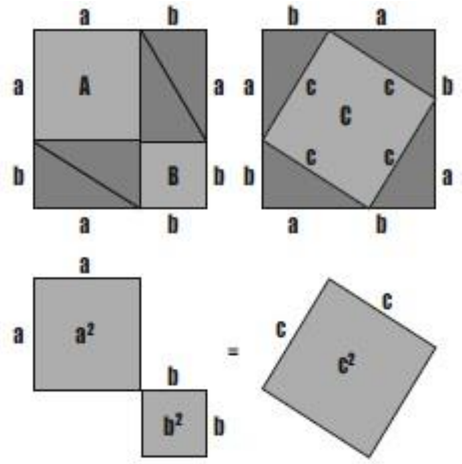

Рис. 10. К доказательству теоремы Пифагора

Фракталы

В начале XX в. шведский математик Нильс Фабиан Хельге фон Кох построил кривую в форме снежинки — фактически первую фрактальную кривую (рис. 11). Она получается при обращении с одной из сторон треугольника как с единичным звеном, которое делится на три равные части, и средняя часть преобразуется в новый треугольник (рис. 12). Любопытное свойство кривой Коха состоит в том, что это конечная область, поскольку остается в пределах некоторого круга, однако на каждой стадии приращения длина этой кривой увеличивается. Таким образом, получается кривая, ограничивающая конечную площадь, но при этом сама она имеет «бесконечную» длину!

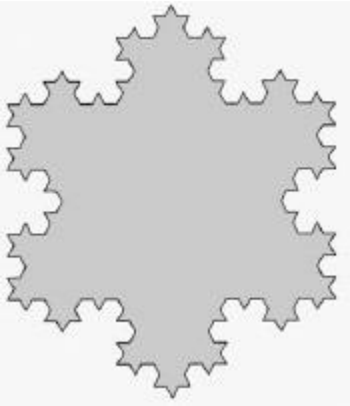

Рис. 11. Снежинка Коха

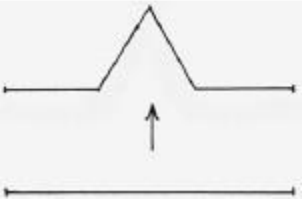

Рис. 12. Звено кривой Коха

Свежий взгляд на размерность пространства предложил немецкий математик Феликс Хаусдорф. Его представление связано с показателем степени. Если увеличить длину отрезка втрое, отрезок становится в три раза больше исходного. Поскольку $3 = 3^1$, размерность линии считается равной 1. Если замкнутый квадрат увеличить втрое, его площадь против исходной увеличится в 9 раз, т.е. 3^2, а значит, размерность получается 2. Если куб увеличить аналогично, его объем возрастет в 27 раз (3^3) — размерность 3. Если элементарное звено кривой Коха масштабировать втрое, оно становится в 4 раза длиннее исходного. Применим хаусдорфову размерность D к приведенной схеме: $4 = 3^D$. $D = \log4/\log3$, что означает размерность для кривой Коха приблизительно равна 1,262.

Фракталы уже применяют к описанию роста морских организмов — кораллов и губок. Разрастание современных городов, оказалось, тоже похоже на фрактальное. Есть и исследования фрактальности движений ценных бумаг на международных фондовых биржах (подробнее см. Бенуа Мандельброт. (Не)послушные рынки: фрактальная революция в финансах).

Хаос

В начале XIX в. Пьер-Симон де Лаплас, опубликовал сочинение о детерминированной Вселенной: если бы нам стали известны все расположения и скорости всех объектов во Вселенной, а также все силы, воздействующие на них в заданный момент времени, можно было бы точно рассчитать все эти значения на все дальнейшее время. Вселенная и все ее объекты оказались бы полностью определены. Теория хаоса показывает, что мир затейливее этого предположения (см. Пьер Симон Лаплас. Опыт философии теории вероятностей).

В XIX в. верили, что небольшие изменения начальных условий мало меняют и результат. Теория хаоса не оставила от этих представлений камня на камне. Небольшое изменение исходных условий некоторого явления может привести к результатам, сильно отличающимся от ожидаемых, — в этом состоит эффект бабочки.

Открытие эффекта бабочки в 1961 году произошло случайно. Метеоролог Эдвард Лоренц из Массачусеттского технологического института ушел выпить кофе и оставил свой допотопный компьютер заниматься порученными ему графиками, а когда вернулся, обнаружил нечто неожиданное. Ученый собирался построить кое-какие интересные погодные кривые, а результат оказался совершенно не узнаваем. Странное дело, Лоренц ввел те же исходные значения и ожидал идентичной картинки на выходе. Может, пришла пора избавиться от старого компьютера и обзавестись чем-нибудь понадежнее? Обдумав полученный результат, Лоренц тем не менее обнаружил разницу в исходных данных: прежде он вводил все цифры с точностью до шестого знака после запятой, а тут вдруг поленился и ввел лишь по три. Возникшее расхождение в результатах он и назвал «эффектом бабочки». После этого открытия его интеллектуальные интересы сместились в математическое поле (см. Джеймс Глейк. Хаос. Создание новой науки).

Характеристика хаоса состоит в том, что детерминированная система может вести себя случайным образом. Рассмотрим пример — итерационную, формулу $a \times p \times (1 - p)$, где p — размер популяции, измеряемый в виде пропорции в пределах от 0 до 1. Значение a должно быть между 0 и 4, чтобы соблюсти диапазон значений p от 0 до 1. Смоделируем изменение численности населения при a = 2 (см. приложенный Excel-файл). Возьмем начальное значение p, допустим, 0,3 (в момент времени 0), тогда в момент времени 1 получаем, 0,3*2*(1–0,3) = 0,42. В момент времени 2 значение p = 0,4872. Довольно скоро p стабилизируется на значении 0,5. Такая стабилизация происходит всегда при значениях a меньше 3.

Возьмем теперь a = 3,9, значение, близкое к максимально допустимому, а за начальную точку примем то же значение p = 0,3. В этом случае стабилизации не происходит — значения колеблются в широком диапазоне. Это оттого, что значение a оказывается в «хаотической области» — это диапазон значений a больше 3,57. Более того, если выбрать другое начальное значение численности населения — к примеру, p = 0,299 (очень близкое к 0,3) — рост численности поначалу очень похож на предыдущий, но вскоре становится полностью от него отличен (рис. 13). Такое поведение этих графиков отметил Эдвард Лоренц в 1961 году.

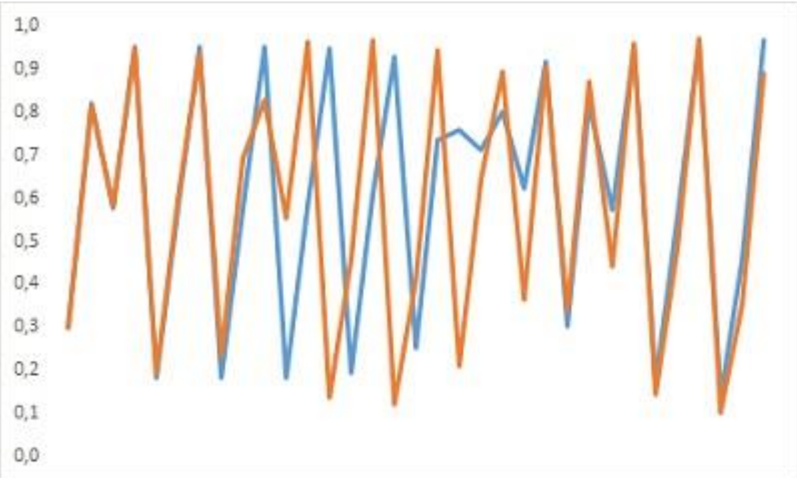

Рис. 13. Динамика популяции в хаотической области

Аксиома параллельности

Евклидова геометрия — 13 книг «Начал», написанных в 300-х годах до н.э. Евклидова геометрия базируется на пяти постулатах, последний из которых вызвал полемику 2000 лет спустя после появления «Начал». В 1795 году Джон Плейфэр предложил формулировку 5-го постулата, обретшую популярность: для линии l и точки P, не лежащей на линии l, есть единственная прямая, проходящая через P и параллельная l. Прорыв удалось осуществить Карлу Фридриху Гауссу, Яношу Бойяи и Николаю Ивановичу Лобачевскому. Гаусс свою работу не опубликовал, но, похоже, выводы сделал еще в 1817 году. Бойяи издал свой труд в 1831-м, а Лобачевский, независимо от Гаусса и Бойяи, — в 1829-м, в результате чего между двумя последними возник диспут о первенстве открытия.

Бойяи и Лобачевский построили новую геометрию, допустив, что линий, проходящих через точку P и не пересекающихся с l, может быть более одной. Бойяи и Лобачевский предложили новый вид геометрии, не подпадающий под Евклидов здравый смысл. По сути, их неевклидову геометрию можно представлять, как геометрию на искривленной плоскости, которую еще называют псевдосферой (рис. 14).

Рис. 14. Псевдосфера

Любопытное свойство неевклидовой геометрии заключается в том, что сумма всех углов в треугольнике меньше 180°. Такую геометрию называют гиперболической. Другая альтернатива пятому постулату гласит, что любая линия, проходящая через P, пересекается с l. Иными словами, через P не проходит ни одной линии, «параллельной» l. Геометрия эта отличается от геометрии Бойяи и Лобачевского, но тем не менее это самая настоящая геометрия.

Одна из моделей — геометрия на поверхности сферы. В пределах этой геометрии большие круги (равные по длине самой сфере) играют роль прямых линий евклидовой геометрии. В этой разновидности неевклидовой геометрии сумма всех углов в треугольнике больше 180°. Такая геометрия называется эллиптической геометрией; ее связывают с именем немецкого математика Г.Ф.Б. Римана, занимавшегося ею в 1850-х годах (подробнее см. Леонард Млодинов. Евклидово окно).

Графы

Кенигсберг — город в Восточной Пруссии, знаменитый семью мостами над рекой Прегель (рис. 15). Можно ли обойти весь Кенигсберг, прошагав по каждому мосту лишь однажды? В 1735 году Леонард Эйлер предложил решение этой задачи. Эйлер заметил, что способствует успеху такой прогулки. Когда мы всякий раз переходим тот или иной мост и оказываемся на берегу, необходимо покинуть этот берег по ранее нехоженому мосту. Переведя эту мысль в абстрактный рисунок, можем сказать, что линии, пересекающиеся в той или иной точке, должны быть парными. Мост можно перейти только в том случае, если в каждой точке сходится четное количество линий.

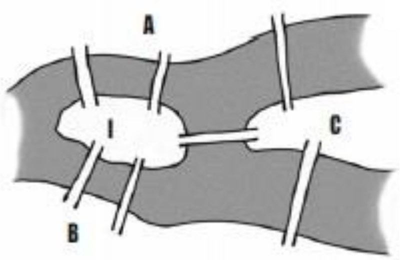

Рис. 15. Мосты Кёнигсберга

Число линий, встречающихся в одной точке, называется «степенью» этой точки (вершины). Теорема Эйлера гласит: Мосты города можно перейти в точности по одному разу, если три и более точек имеют четную степень. Глядя на граф, описывающий Кенигсберг (рис. 16), мы видим, что каждая точка имеет нечетную степень. Это означает, что в этом городе обойти все мосты всего лишь по разу не получится.

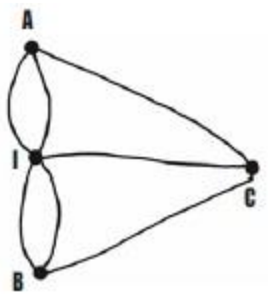

Рис. 16. Граф, соответствующий мостам в Кёнигсберге

Если построить еще два моста (рис. 17) гулять можно откуда угодно и даже вернуться в то же место, потому что в этом случае у всех точек будет четная степень.

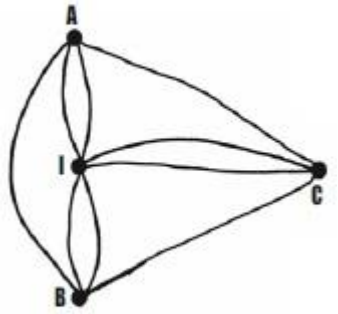

Рис. 17. Два дополнительных моста

Теория Байеса

Подробнее см. Идеи Байеса для менеджеров и Формула Байеса.

Распределения

Владислав Борткевич изучал смертные случаи в Прусской армии от брыкливых лошадей. Он собрал записи о десяти кавалерийских корпусах за 20 лет, получив данные о 200 корпус-годах. Он оценил число смертей и число корпус-лет, за которые произошли эти смерти (рис. 18, верхняя часть). Например, оказалось, что в 109 корпус-годах не случилось ни одной смерти, а в один корпус-год — целых четыре.

Собранные данные					
Число смертей	0	1	2	3	4
Частота появления	109	65	22	3	1
Средневзвешенное значение	0,61				
Теоретические данные					
Число смертей	0	1	2	3	4
Вероятность, p	0,5434	0,3314	0,1011	0,0206	0,0031
Ожидаемое число смертей, 200 * p	108,7	66,3	20,2	4,1	0,6

Рис. 18. Опытные и теоретические данные

Наиболее подходящая теоретическая методика моделирования частоты возникновения редких событии — распределение Пуассона (подробнее см. Распределение Пуассона):

$$P(X) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{X}}{X!}$$

где *P(X)* — вероятность *X* успешных испытаний, λ — ожидаемое количество успехов, *e*— основание натурального логарифма, равное 2,71828, *X*— количество успехов в единицу времени.

Видно (сравни два набора данных на рис. 18), что теоретическое распределение вполне совпадает с экспериментальными данными, собранными Борткевичем.

См. также Закон Бенфорда или закон первой цифры и Закон Ципфа и фрактальная природа социальных и экономических явлений.

Кривая нормального распределения

Подробнее см. Нормальное распределение. Построение графика в Excel. Концепция шести сигм, Нормальное распределение.

Связанные данные

Корреляция определяет, насколько хорошо два количества — например, вес и рост — связаны друг с другом. Регрессию можно применять в предсказании значений одного качества (допустим, веса) в зависимости от другого (в нашем случае — роста). Термин «корреляция» ввел в 1880-х годах Фрэнсис Гальтон. Коэффициент корреляции Пирсона, названный в честь биографа и протеже Гальтона — Карла Пирсона, измеряется по шкале от –1 до +1. Если численное значение этого коэффициента велико (допустим, +0,9), это означает, что корреляция между переменными сильная. Коэффициент корреляции определяет тенденцию данных располагаться вдоль прямой. Если коэффициент близок к нулю, корреляции практически нет. **Однако, если между двумя переменными обнаружена корреляция, это еще не означает причинно-следственной связи.**

В 1880-х Фрэнсис Гальтон поставил эксперименты, в которых сравнил рост взрослых молодых людей с ростом их родителей. Для среднего роста 205 родителей и 928 потомков он обнаружил средний рост в 173,4 см, и это значение назвал посредственностью. Он обнаружил, что дети очень высоких «усредненных» родителей обычно выше, чем посредственность, но не настолько рослы, как их усредненный родитель, тогда как приземистые дети оказались выше своих усредненных родителей, однако ниже посредственности. Иными словами, рост детей регрессировал к посредственности. Регрессия — могучая методика широкой применимости (подробнее см. Простая линейная регрессия и Регрессия, как инструмент контролируемого искусственного интеллекта).

Задача о диете

См. Решение задачи линейного программирования в Excel и Линейное программирование в Excel.

Теория игр

Подробнее см. Авинаш Диксит, Барри Нейлбафф. Теория игр.