## Комбинаторика в Excel

[Комбинаторика]() — раздел математики, изучающий дискретные объекты, множества (сочетания, перестановки, размещения элементов) и отношения на них. Термин *комбинаторика* был введён в математический обиход Лейбницем, который в 1666 году опубликовал свой труд «Рассуждения о комбинаторном искусстве». Excel поддерживает ряд функций комбинаторики. Чтобы разобраться, какую формулу использовать, следует ответить на ряд вопросов:

1. Исходное множество содержит только уникальные элементы, или некоторые из них могут повторяться?
2. Операция выполняется со всеми элементами множества, или только с некоторой выборкой из них?
3. Важен ли порядок элементов в выборке?
4. После выбора элемента мы его возвращаем назад?


Рис. 1. Дерево решений, какую формулу комбинаторики использовать

### Перестановки без повторений

Возьмем несколько *различных* элементов (предметов) и будем переставлять их всевозможными способами, оставляя неизменным их число и меняя только их порядок (рис. 2). Каждая из получившихся таким образом комбинаций носит название *перестановки*. Перестановкой из n элементов называется **упорядоченное** множество, составленное из всех элементов множества.

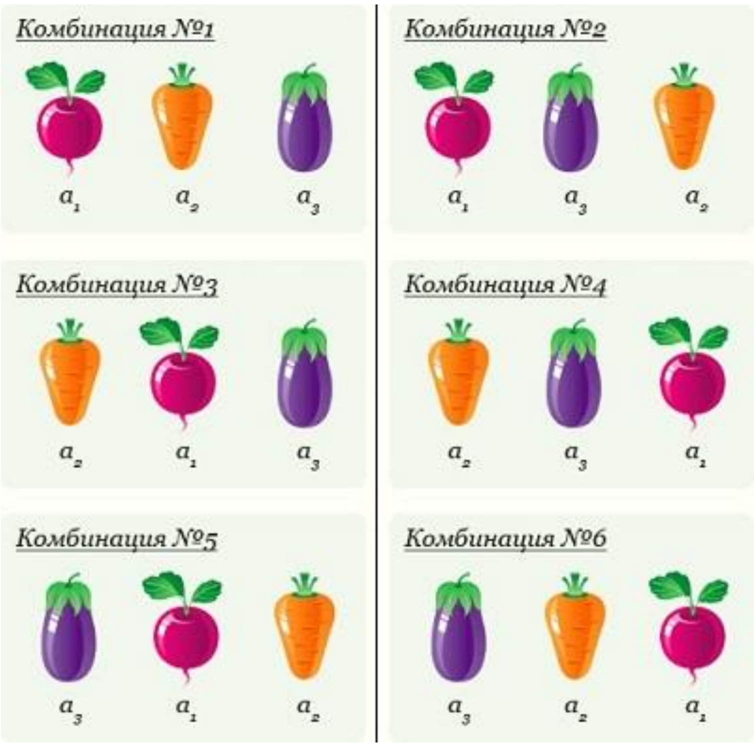



Рис. 2. Перестановки (понравившаяся картинка взята [здесь](здесь))

Если все n элементы разные, то число перестановок обозначается $P_n$ от perturbation.

(1) $P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$

С другой стороны, произведение *n* первых натуральных чисел называется n-факториал и обозначается n!

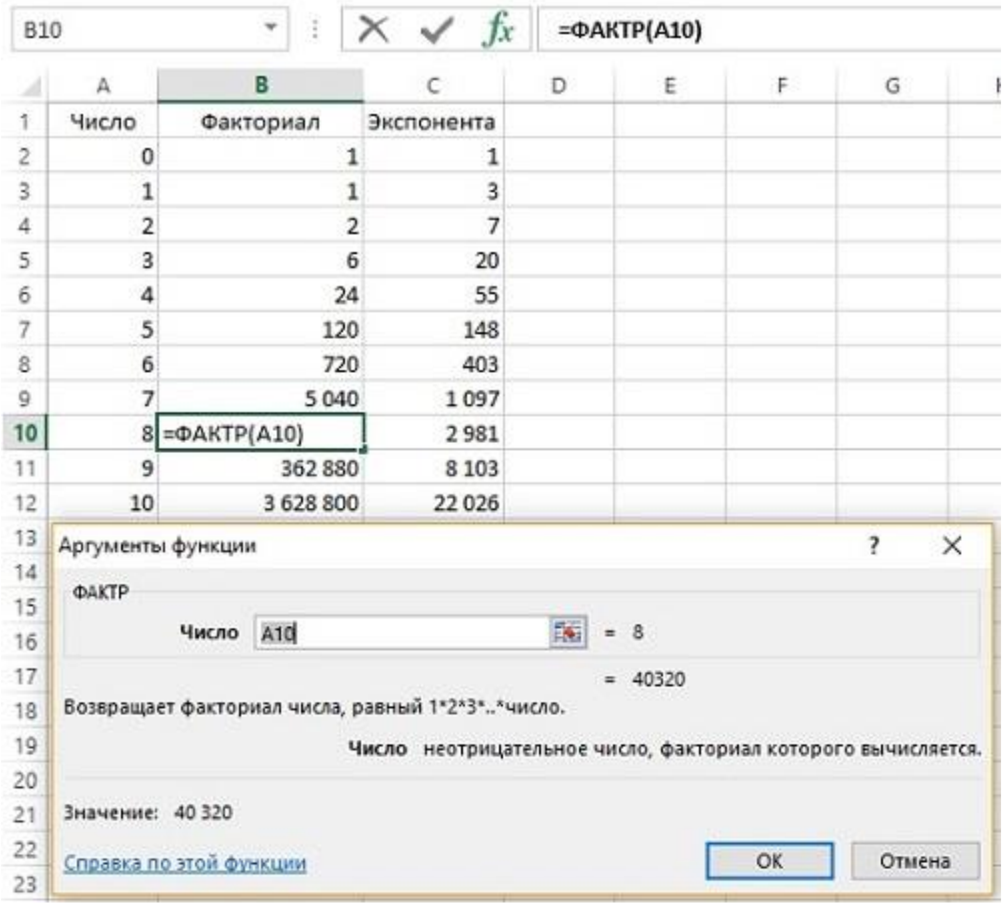
(2) $n! = 1 * 2 * 3 * \ldots * (n-1) * n$

Например

(2a) $5! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 = 120$

По определению: 1! = 1; 0! = 1.

Функция в Excel =ФАКТР(n). Факториал растет очень быстро. Существенно быстрее экспоненты (рис. 3).



B10 =ФАКТР(A10)

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | Число | Факториал | Экспонента |
| 2 | 0 | 1 | 1 |
| 3 | 1 | 1 | 3 |
| 4 | 2 | 2 | 7 |
| 5 | 3 | 6 | 20 |
| 6 | 4 | 24 | 55 |
| 7 | 5 | 120 | 148 |
| 8 | 6 | 720 | 403 |
| 9 | 7 | 5 040 | 1 097 |
| 10 | 8 | =ФАКТР(A10) | 2 981 |
| 11 | 9 | 362 880 | 8 103 |
| 12 | 10 | 3 628 800 | 22 026 |



Рис. 3. Расчет числа перестановок без повторений с помощью факториала

## Перестановки с повторениями

Если в основном n множестве не все элементы разные, то число перестановок будет меньше n! Например, если наше множество состоит из трех яблок и одной груши, то всего возможно 4 перестановки (рис. 4). Груша может быть первой, второй, третьей или четвертой, а яблоки неразличимы).

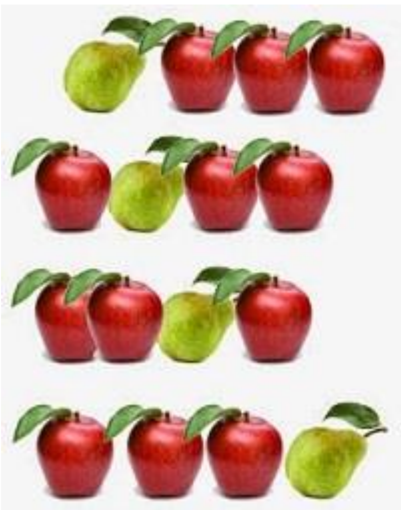


Рис. 4. Перестановки с повторениями (картинка найдена здесь)

В общем случае, можно сказать: последовательность длины n, составленная из k разных символов, первый из которых повторяется $n_1$ раз, второй – $n_2$ раз, третий – $n_3$ раз, …, k-й – $n_k$ раз (где $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$) называется перестановкой с повторениями из n элементов.

$$(3)\ \bar{P}(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

Пример. Сколько различных пятибуквенных слов можно составить из букв слова «манна»?

Решение. Буквы *а* и *н* повторяются 2 раза, а буква *м* один раз.

$$(3a)\ \bar{P}(2,2,1) = \frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!} = 30$$

## Размещение без повторений

Размещением из n элементов по m называется упорядоченный набор из m различных элементов, выбранных из n-элементного множества (все элементы множества уникальны; позиции элементов в выборке важны). Число размещений обозначается $A_n^m$ от arrangement.

$$(4)\ A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Например, два элемента из трех можно выбрать и расположить шестью способами (рис. 4):

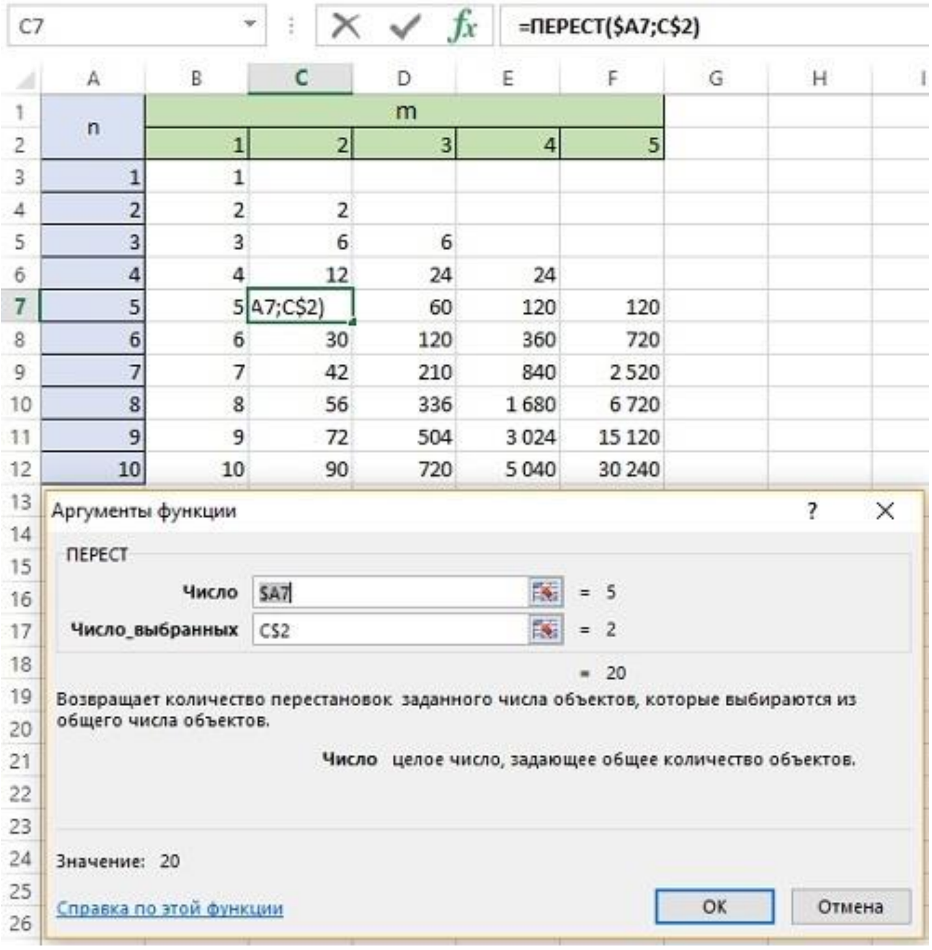
$$(4a)\ A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6 \text{ или}$$

$$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1} = 6$$


Рис. 5. Размещение без повторений (картинка из [презентации](#))

Если m = n количество элементов совпадает с количеством имеющихся мест для размещения. Знаменатель в формуле (4) превращается в 0! = 1. Остается только числитель n! А это – изученная выше перестановка без повторений; см. формулу (1).

Название функции в Excel несколько обескураживает. Но... что поделаешь: =ПЕРЕСТ(n;m)




| n | m | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 1 | | | | |
| 2 | 2 | 2 | | | |
| 3 | 3 | 6 | 6 | | |
| 4 | 4 | 12 | 24 | 24 | |
| 5 | 5 | A7;C$2) | 60 | 120 | 120 |
| 6 | 6 | 30 | 120 | 360 | 720 |
| 7 | 7 | 42 | 210 | 840 | 2 520 |
| 8 | 8 | 56 | 336 | 1 680 | 6 720 |
| 9 | 9 | 72 | 504 | 3 024 | 15 120 |
| 10 | 10 | 90 | 720 | 5 040 | 30 240 |

Рис. 6. Размещение без повторений; обратите внимание на смешанные ссылки, которые позволяют протянуть формулу на всю таблицу

## Размещение с повторениями

Размещение с повторениями по смыслу отличается от перестановок с повторением. Перестановки с повторением – это операция над множеством, которое состоит из нескольких видов элементов, так что каждый вид представлен несколькими одинаковыми элементами. Размещение с повторениями – выборки из множества с возвращением выбранного элемента назад перед каждым новым выбором.

Например, если у вас множество, включающее грушу, яблоко и лимон, и вам нужно выбрать два элемента, так что после первого выбора вы возвращаете выбранный предмет назад, то существует девять различных комбинаций (рис. 7).

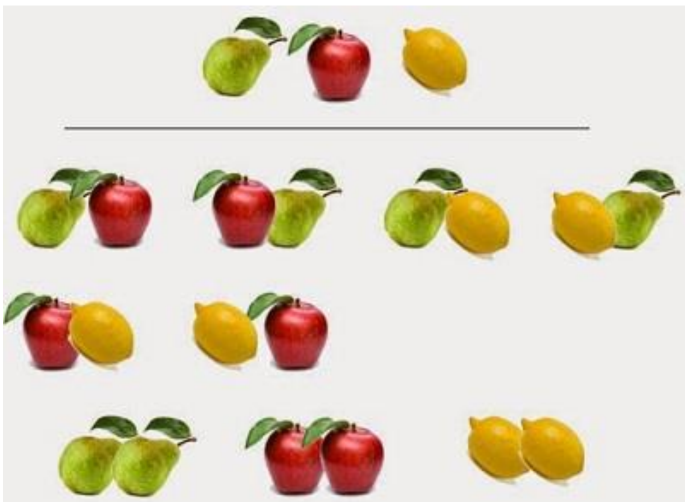


Рис. 7. Размещение с повторениями

В общем случае *размещение с повторениями* или *выборка с возвращением* – это размещение «предметов» в предположении, что каждый «предмет» может участвовать в размещении несколько раз. По правилу умножения количество размещений с повторениями из n по k:

$$(5)\ \overline{A_n^k} = n^k$$

Задача. Сколько различных номеров можно составить в одном коде региона?

Подсказка. В номере используется 12 букв алфавита, также существующих и в латинском алфавите (А, В, Е, К, М, Н, О, Р, С, Т, У, Х).


Рис. 8. Номер автомобиля

Решение. Можно воспользоваться формулой для размещения с повторениями:

$$(5а)\ \text{Число номеров} = 10^3 \cdot 12^3 = 1\ 728\ 000$$

Каждую цифру можно выбрать 10 способами, а всего цифр 3, при этом они могут повторяться, и их порядок важен. Каждую букву можно выбрать 12 способами, при этом буквы могут повторяться, и их порядок важен.

## Сочетания без повторений

Сочетаниями из n множества по m элементов называются комбинации, составленные из данных n элементов по m элементов, которые различаются хотя бы одним элементом (в сочетаниях не учитывается порядок элементов).

$$(6)\ C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$$

Например, два элемента из 4 сочетаются 6 способами (порядок следования не важен):

$$(6а)\ C_4^2 = \frac{4!}{2! \cdot (4-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = 6$$

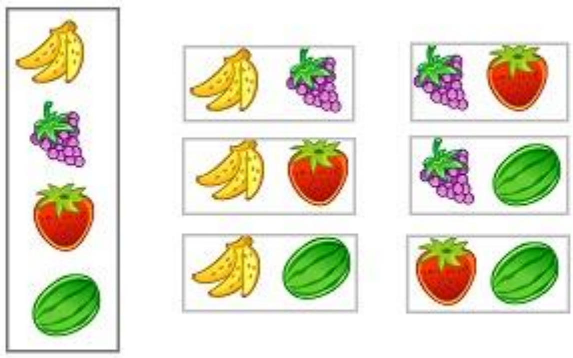


Рис. 9. Сочетания без повторений из 4 по 2

Сочетания без повторений образуют знаменитый треугольник Паскаля (рис. 10). В этом треугольнике на вершине и по бокам стоят единицы. Каждое число равно сумме двух расположенных над ним чисел. Строки треугольника симметричны относительно вертикальной оси. Числа в строках, составляющие треугольник Паскаля, являются сочетаниями

$$(7)\ C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$$

где n – номер строки, m – номер элемента в строке, начиная с нулевого. Например, в строке 7:

$$(7а)\ C_7^0 = \frac{7!}{0! \cdot (7-0)!} = 1;\ \ C_7^1 = \frac{7!}{1! \cdot (7-1)!} = 7;\ \ C_7^2 = \frac{7!}{2! \cdot (7-2)!} = \frac{6 \cdot 7}{2} = 21$$

$$C_7^3 = \frac{7!}{3! \cdot (7-3)!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{2 \cdot 3} = 35;\ \ C_7^4 = \frac{7!}{4! \cdot (7-4)!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 35;\ \ldots$$

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z | AA |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | | | | | | | | | | | | | 1 | | 1 | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | | 1 | | 2 | | 1 | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | | 1 | | 3 | | 3 | | 1 | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | | 1 | | 4 | | 6 | | 4 | | 1 | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | | 1 | | 5 | | 10 | | 10 | | 5 | | 1 | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | 1 | | 6 | | 15 | | 20 | | 15 | | 6 | | 1 | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | 1 | | 7 | | 21 | | 35 | | 35 | | 21 | | 7 | | 1 | | | | | | |
| 8 | | | | | | 1 | | 8 | | 28 | | 56 | | 70 | | 56 | | 28 | | 8 | | 1 | | | | | |
| 9 | | | | | 1 | | 9 | | 36 | | 84 | | 126 | | 126 | | 84 | | 36 | | 9 | | 1 | | | | |
| 10 | | | | 1 | | 10 | | 45 | | 120 | | 210 | | 252 | | 210 | | 120 | | 45 | | 10 | | 1 | | | |
| 11 | | | 1 | | 11 | | 55 | | 165 | | 330 | | 462 | | 462 | | 330 | | 165 | | 55 | | 11 | | 1 | | |
| 12 | | 1 | | 12 | | 66 | | 220 | | 495 | | 792 | | 924 | | 792 | | 495 | | 220 | | 66 | | 12 | | 1 | |
| 13 | 1 | | 13 | | 78 | | 286 | | 715 | | 1287 | | 1716 | | 1716 | | 1287 | | 715 | | 286 | | 78 | | 13 | | 1 |

Рис. 10. Треугольник Паскаля

В Excel используется функция =ЧИСЛКОМБ(n;m).

## Сочетания с повторениями

Сочетания с повторениями по смыслу похожи на размещение с повторениями – это выборки из множества с возвращением выбранного элемента назад перед каждым новым выбором. При этом порядок в выборке не важен.

Например, два предмета из четырех можно выбрать 10 способами, если после каждого выбора предмет возвращается назад (рис. 11).

Рис. 11. Сочетания с повторениями

В общем случае, число сочетаний с повторениями:

$$(8)\ \overline{C_n^k} = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!}$$

Для нашего примера с фруктами

$$(8а)\ \overline{C_4^2} = \frac{(4+2-1)!}{2! \cdot (4-1)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$$

В Excel для подсчета числа сочетаний с повторениями используется функция =ЧИСЛКОМБА(n;m). В нашем примере =ЧИСЛКОМБА(4;2) = 10.