**Ранговый критерий Крускала-Уоллиса. Непараметрический метод для полностью рандомизированного эксперимента**

Ранговый критерий Крускала-Уоллиса для оценки разностей между *с* медианами (*с* > 2) представляет собой обобщение [рангового критерия Уилкоксона](http://baguzin.ru/wp/?p=6010) для двух независимых выборок (см. также [Однофакторный дисперсионный анализ](http://baguzin.ru/wp/?p=5884)). Таким образом, критерий Крускала-Уоллиса является непараметрической альтернативой *F*-критерию в однофакторном дисперсионном анализе, аналогично тому, как критерий Уилкоксона представляет собой непараметрическую альтернативу *t*-критерию, использующему суммарную дисперсию при сравнении двух независимых выборок. Если выполняются условия, необходимые для применения *F-*критерия в однофакторном дисперсионном анализе, критерий Крускала-Уоллиса обладает той же мощностью.[[1]](#footnote-1)

Ранговый критерий Крускала-Уоллиса применяется для проверки гипотезы, что *с* независимых выборок извлечены из генеральных совокупностей, имеющих одинаковые медианы. Иначе говоря, нулевая и альтернативная гипотезы формулируются следующим образом:

*Н0: М1 = М2 = ... =Mc*

*H1*: не все *Mj* (*j* = 1, 2, ..., *с*) являются одинаковыми

Для этого необходимо знать ранги, вычисленные по всем выборкам, а *с* генеральных совокупностей, из которых они извлечены, должны иметь одинаковые изменчивость и вид. Для того чтобы применить критерий Крускала-Уоллиса, сначала необходимо заменить наблюдения в *с* выборках их объединенными рангами. При этом первый ранг соответствует наименьшему наблюдению, а ранг *n* — наибольшему (*n = n1 + n2 + ... + nc*). Если некоторые значения повторяются, им присваивается среднее значение их рангов.

Критерий Крускала-Уоллиса является альтернативой *F*-критерию в однофакторном дисперсионном анализе. *H*-статистика, применяемая в критерии Крускала-Уоллиса, аналогична величине SSA— *межгрупповой вариации* (подробнее см. [Однофакторный дисперсионный анализ](http://baguzin.ru/wp/?p=5884)), по которой вычисляется *F*-статистика. Вместо сравнения средних значений *X̅j* всех *с* групп с общим средним значением *X̿*, в критерии Крускала-Уоллиса средние ранги каждой из *с* групп сравниваются с общим рангом, вычисленным на основе всех *n* наблюдений. Если существует статистически значимый эффект эксперимента, средние ранги каждой группы будут значительно отличаться друг от друга и от общего ранга. При возведении этих разностей в квадрат *Н*-статистика увеличивается. С другой стороны, если эффект эксперимента не наблюдается, статистика *Н* теоретически должна быть равной нулю. Однако на практике вследствие случайных изменений статистика *Н* будет ненулевой, но достаточно малой.

Критерий Крускала-Уоллиса для разностей между *с* медианами:

*(1) H =* $\left[\frac{12}{n(n+1)}\right]\sum\_{j=1}^{c}\frac{T\_{j}^{2}}{n\_{j}}$ *–3(n + 1)*

где *n* — общее количество наблюдений в объединенных выборках, *nj* — количество наблюдений в j-й выборке (*j = 1, 2, … , с*), *Tj* — сумма рангов *j*-й выборки.

При достаточно большом объеме выборок (больше пяти) *H*-статистику можно аппроксимировать χ2-распределением с *с – 1* степенями свободы. Таком образом, при заданном уровне значимости α решающее правило формулируется так: гипотеза *Н0* отклоняется, если H > χU2 (рис. 1), в противном случае гипотеза *Н0* не отклоняется. Критические значения χ2-распределения вычисляются с помощью функции Excel =ХИ2.ОБР(вероятность;степени\_свободы).



Рис. 1. Критическая область критерия Крускала-Уоллиса

Продемонстрируем критерий Крускала-Уоллиса на примере оценки прочности парашютов в зависимости от поставщика синтетических волокон. Если прочность парашютов не является нормально распределенной случайной величиной, для оценки различий между медианами четырех генеральных совокупностей можно применить непараметрический критерий Крускала-Уоллиса.

Нулевая гипотеза заключается в том, что прочность всех парашютов одинакова: *Н0: М1 = М2 = М3 =M4*. Альтернативная гипотеза утверждает, что по крайней мере один поставщик отличается от других: *H1*: не все *Mj* (*j* = 1, 2, 3, 4) являются одинаковыми. Результаты эксперимента, ранги и вычисления приведены на рис. 2.



Рис. 2. Прочность и ранги парашютов, сшитых из синтетической ткани, приобретенной у четырех разных поставщиков

В процессе преобразования 20 показателей прочности в объединенные ранги, выясняется, что третий парашют, произведенный из синтетического волокна первого поставщика, имеет наименьшую прочность, равную 17,2. Он получает ранг 1. Четвертый парашют, произведенный из синтетического волокна первого поставщика, и второй парашют, сотканный из волокон четвертого поставщика, имеют одинаковую прочность, равную 19,9. Поскольку им соответствуют ранги 5 и 6, обоим парашютам присваивается ранг 5,5, равный среднему значению рангов 5 и 6. И, наконец, ранг 20 присваивается первому парашюту, сотканному из волокон второго поставщика, поскольку величина 26,3 является наибольшей. После присвоения рангов вычисляется их сумма в каждой группе: Т1 = 27,0; Т2 = 76,5; Т3 = 62,0; Т4 = 44,5. Для проверки рангов просуммируем эти величины:



Используя формулу (1), вычислим *Н*-статистику:



Статистика *Н* имеет приближенное χ2-распределение с *с – 1* степенями свободы. При уровне значимости α, равном 0,05, определяем величину χU2 — верхнего критического значения χ2-распределения с *с – 1* = 3 степенями свободы с использованием функции =ХИ2.ОБР(1 – α;с –1) = 7,815 (рис. 2). Поскольку вычисленная *Н*-статистика равна 7,889 и превышает критическое значение 7,815, нулевая гипотеза отклоняется. Следовательно, не все фирмы поставляют синтетическое волокно, прочность которого имеет одинаковую медиану. Аналогичный вывод можно сделать, вычислив *р*-значение по формуле р(Н=7,889) =1-ХИ2.РАСП(7,889;3;ИСТИНА) =0,048 (рис. 2). *р*-значение равно 0,048, т.е. меньше уровня значимости 0,05. Поскольку нулевая гипотеза отклоняется, приходим к выводу, что фирмы поставляют волокна разной прочности. На следующем этапе необходимо попарно сравнить всех поставщиков и определить, какие из них отличаются друг от друга. Для этого можно применить апостериорную процедуру множественного сравнения, предложенную Дж. Данном.

Для применения критерия Крускала-Уоллиса должны выполняться следующие условия.

* Все *с* выборок случайно и независимо друг от друга извлекаются из соответствующих генеральных совокупностей.
* Анализируемая переменная является непрерывной.
* Наблюдения допускают ранжирование как внутри, так и между группами.
* Все *с* генеральных совокупностей имеют одинаковую изменчивость.
* Все *с* генеральных совокупностей имеют одинаковый вид.

Процедура Крускала-Уоллиса имеет меньше ограничений, чем *F*-критерий. Процедура Крускала-Уоллиса предусматривает ранжирование только по всем выборкам в совокупности. Общее распределение должно быть непрерывным, но его вид значения не имеет. Если эти условия не выполняются, критерий Крускала-Уоллиса по-прежнему можно применять для проверки гипотезы о различиях между *с* генеральными совокупностями. Альтернативная гипотеза утверждает, что среди *с* генеральных совокупностей существует хотя бы одна, которая отличается от остальных какой-нибудь характеристикой — либо средним значением, либо видом. С другой стороны, для применения *F*-критерия переменная должна быть числовой, а *с* выборок должны извлекаться из нормально распределенных генеральных совокупностей, имеющих одинаковую дисперсию.

В полностью рандомизированных экспериментах, для которых выполняются условия *F*-критерия, следует применять именно его, а не процедуру Крускала-Уоллиса, поскольку мощность *F*-критерия в этой ситуации выше. С другой стороны, если эти условия не выполняются, более мощным становится критерий Крускала-Уоллиса, и следует предпочесть именно его.

Предыдущая заметка [Непараметрические критерии. Ранговый критерий Уилкоксона](http://baguzin.ru/wp/?p=6010)

Следующая заметка

К оглавлению [Статистика для менеджеров с использованием Microsoft Excel](http://baguzin.ru/wp/?p=5285)

1. Используются материалы книги Левин и др. Статистика для менеджеров. – М.: Вильямс, 2004. – с. 748–751 [↑](#footnote-ref-1)