Применяя правила сложения и умножения вероятностей, имеем:

$$\mathsf{P}(H_1) = 0{,}4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}3 + 0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}3 + 0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}7 = 0{,}36.$$

Аналогично,

$$\mathsf{P}(H_2) = 0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}7 + 0{,}4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}7 + 0{,}4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}3 = 0{,}41;$$

$$\mathsf{P}(H_3) = 0{,}4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}7 = 0{,}14.$$

Условные вероятности события A при этих гипотезах равны

$$\mathsf{P}(A\,|\,H_1) = 0{,}2;\quad \mathsf{P}(A\,|\,H_2) = 0{,}6;\quad \mathsf{P}(A\,|\,H_3) = 1{,}0.$$

По формуле (2.5.2):

$$\mathsf{P}(A) = 0{,}36\cdot 0{,}2 + 0{,}41\cdot 0{,}6 + 0{,}14\cdot 1{,}0 = 0{,}458. \blacktriangleright$$

2.6. Теорема гипотез (формула Бейеса)

Следствием правила умножения и формулы полной вероятности является *теорема гипотез* или *формула Бейеса.*

Представим себе следующую ситуацию. До опыта о его условиях можно было сделать ряд гипотез $H_1, H_2, \ldots$ $\ldots, H_n$, несовместных и образующих полную группу:

$$\sum_{i=1}^{n} H_i = \Omega;\quad H_iH_j = \varnothing \qquad (i \neq j).$$

Вероятности гипотез до опыта (так называемые «априорные вероятности») заданы и равны:

$$\mathsf{P}(H_1),\ \mathsf{P}(H_2),\ \ldots,\ \mathsf{P}(H_n);\quad \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(H_i) = 1.$$

Теперь предположим, что опыт п р о и з в е д е н, и в его результате появилось событие A. Спрашивается, как нужно пересмотреть вероятности гипотез с учетом этого факта? Другими словами, найти «апостериорные» вероятности гипотез при условии, что опыт дал результат A:

$$\mathsf{P}(H_1\,|\,A);\quad \mathsf{P}(H_2\,|\,A);\ \ldots;\ \mathsf{P}(H_n\,|\,A).$$

Решим эту задачу, пользуясь правилом умножения и формулой полной вероятности.

Возьмем любую гипотезу H_i и вычислим вероятность произведения H_iA по правилу умножения в двух формах:

$$\mathsf{P}(H_iA) = \mathsf{P}(H_i)\mathsf{P}(A \mid H_i) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(H_i \mid A).$$

Теперь отбросим левую часть:

$$\mathsf{P}(H_i)\cdot\mathsf{P}(A \mid H_i) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(H_i \mid A) \qquad (2.6.1)$$

и разделим обе части равенства (2.6.1) на $P(A)$ (предполагается, что она не равна нулю); получим

$$\mathsf{P}(H_i \mid A) = [\mathsf{P}(H_i)\mathsf{P}(A \mid H_i)]/\mathsf{P}(A). \qquad (2.6.2)$$

Наконец, заменим $\mathsf{P}(A)$ его выражением по формуле полной вероятности:

$$\mathsf{P}(H_i \mid A) = [\mathsf{P}(H_i)\mathsf{P}(A \mid H_i)] \Bigg/ \left[\sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(H_i)\mathsf{P}(A \mid H_i)\right]$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (2.6.3)$$

Формула (2.6.3) называется **формулой Бейеса**. Она позволяет пересчитывать вероятности гипотез в свете новой информации, состоящей в том, что опыт дал результат A.

Пример 1. Имеется 3 урны; в первой 3 белых шара и 1 черный; во второй — 2 белых шара и 3 черных; в третьей — 3 белых шара. Некто подходит наугад к одной из урн и вынимает из нее 1 шар. Этот шар оказался белым. Найти послеопытные (апостериорные) вероятности того, что шар вынут из 1-й, 2-й, 3-й урны.

Решение. Гипотезы:

$$H_1 = \{\text{выбрана первая урна}\},$$
$$H_2 = \{\text{выбрана вторая урна}\},$$
$$H_3 = \{\text{выбрана третья урна}\}.$$

Так как урна выбирается наугад, то априорные вероятности гипотез равны:

$$\mathsf{P}(H_1) = \mathsf{P}(H_2) = \mathsf{P}(H_3) = 1/3.$$

В результате опыта появилось событие

$$A = \{\text{из выбранной урны вынут белый шар}\}.$$

Условные вероятности события A при гипотезах H_1, H_2, H_3:

$$\mathsf{P}(A \mid H_1) = 3/4; \quad \mathsf{P}(A \mid H_2) = 2/5; \quad \mathsf{P}(A \mid H_3) = 1,$$

Применяя формулу Бейеса (2.6.3), находим апостериорные вероятности гипотез:

$$\mathsf{P}(H_1 \mid A) = \frac{(1/3)(3/4)}{(1/3)(3/4) + (1/3)(2/5) + (1/3)\cdot 1} = \frac{15}{43};$$

$$\mathsf{P}(H_2 \mid A) = \frac{8}{43}; \quad \mathsf{P}(H_3 \mid A) = \frac{20}{43}. \text{*)}$$

Таким образом, в свете информации о появлении события A вероятности гипотез изменились: самой вероятной стала гипотеза H_3, наименее вероятной — гипотеза H_2. ▶

Пример 2. В партии изделий смешаны изделия трех заводов: N_1 изделий первого, N_2 изделий второго и N_3 изделий третьего завода. Известно, что вероятность дефекта для изделий 1-го, 2-го, 3-го завода равна соответственно p_1, p_2, p_3. Если изделие дефектно, то оно не проходит испытания. Взято наугад одно изделие из смешанной партии; оно не прошло испытания. Найти вероятности того, что оно изготовлено 1-м, 2-м, 3-м заводом.

Решение. A = {изделие не прошло испытания}.

Гипотезы:

H_1 = {изделие изготовлено 1-м заводом};

H_2 = {изделие изготовлено 2-м заводом};

H_3 = {изделие изготовлено 3-м заводом}.

Априорные вероятности гипотез:

$$\mathsf{P}(H_i) = N_i/(N_1 + N_2 + N_3) \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Условные вероятности события A:

$$\mathsf{P}(A \mid H_1) = p_1, \quad \mathsf{P}(A \mid H_2) = p_2; \quad \mathsf{P}(A \mid H_3) = p_3.$$

По формуле Бейеса апостериорные вероятности гипотез:

$$\mathsf{P}(H_i \mid A) = \frac{\dfrac{N_i}{N_1+N_2+N_3}\,p_i}{\dfrac{N_1p_1}{N_1+N_2+N_3} + \dfrac{N_2p_2}{N_1+N_2+N_3} + \dfrac{N_3p_3}{N_1+N_2+N_3}} =$$

$$= \frac{N_ip_i}{N_1p_1 + N_2p_2 + N_3p_3} \qquad (i = 1, 2, 3). \ ▶$$

---

*) Заметим, что так как гипотезы несовместны и образуют полную группу, $\mathsf{P}(H_3 \mid A)$ можно было бы не вычислять, а найти по формуле

$$\mathsf{P}(H_3 \mid A) = 1 - \mathsf{P}(H_1 \mid A) - \mathsf{P}(H_2 \mid A).$$

Пример 3. До опыта об его условиях можно было сделать четыре гипотезы: H_1, H_2, H_3, H_4 с вероятностями, равными, соответственно,

$$\mathsf{P}(H_1) = 0{,}2;\quad \mathsf{P}(H_2) = 0{,}1;\quad \mathsf{P}(H_3) = 0{,}5;\quad \mathsf{P}(H_4) = 0{,}2.$$

В результате опыта появилось событие A, которое невозможно при гипотезах H_1, H_2 и достоверно при гипотезах H_3, H_4. Найти апостериорные вероятности гипотез.

Решение.

$$\mathsf{P}(A\,|\,H_1) = \mathsf{P}(A\,|\,H_2) = 0;\quad \mathsf{P}(A\,|\,H_3) = \mathsf{P}(A\,|\,H_2) = 1.$$

По формуле Бейеса:

$$\mathsf{P}(H_1\,|\,A) = \mathsf{P}(H_2\,|\,A) = 0;$$
$$\mathsf{P}(H_3\,|\,A) = 0{,}5/(0{,}5 + 0{,}2) = 5/7;$$
$$\mathsf{P}(H_4\,|\,A) = 2/7. \blacktriangleright$$

Пример 4. Расследуются причины авиационной катастрофы, о которых можно сделать четыре гипотезы: H_1, H_2, H_3, H_4. Согласно статистике $\mathsf{P}(H_1) = 0{,}2$; $\mathsf{P}(H_2) = 0{,}4$; $\mathsf{P}(H_3) = 0{,}3$; $\mathsf{P}(H_4) = 0{,}1$. Осмотр места катастрофы выявляет, что в ее ходе произошло событие A = {воспламенение горючего}. Условные вероятности события A при гипотезах H_1, H_2, H_3, H_4, согласно той же статистике, равны: $\mathsf{P}(A\,|\,H_1) = 0{,}9$; $\mathsf{P}(A\,|\,H_2) = 0$; $\mathsf{P}(A\,|\,H_3) = 0{,}2$; $\mathsf{P}(A\,|\,H_4) = 0{,}3$. Найти апостериорные вероятности гипотез.

Решение. По формуле Бейеса имеем:

$$\mathsf{P}(H_1\,|\,A) = \frac{0{,}2\cdot 0{,}9}{0{,}2\cdot 0{,}9 + 0{,}4\cdot 0 + 0{,}3\cdot 0{,}2 + 0{,}1\cdot 0{,}3} = \frac{2}{3};$$
$$\mathsf{P}(H_2\,|\,A) = 0;\quad \mathsf{P}(H_3\,|\,A) = 2/9;\quad \mathsf{P}(H_4\,|\,A) = 1/9. \blacktriangleright$$

Пример 5. Объект, за которым ведется наблюдение, может быть в одном из двух состояний:

H_1 = {функционирует} и H_2 = {не функционирует}.

Априорные вероятности этих состояний $\mathsf{P}(H_1) = 0{,}7$, $\mathsf{P}(H_2) = 0{,}3$.

Имеется два источника информации, которые приносят разноречивые сведения о состоянии объекта; первый источник сообщает, что объект не функционирует, второй — что функционирует. Первый источник вообще дает правильные сведения с вероятностью 0,9, а с вероятностью 0,1 — ошибочные. Второй источник менее надежен: он дает правильные сведения с вероятностью 0,7, а с вероятностью 0,3 — ошибочные. На основе анализа донесений найти новые (апостериорные) вероятности гипотез.

Решение. Наблюдено событие

$$A = \{\text{первый источник сообщил } H_2, \text{ второй } H_1\}.$$

Условные вероятности этого события при гипотезах H_1 и H_2 равны:

$$\mathsf{P}(A \mid H_1) = \mathsf{P}\{\text{первый источник дал неверные сведения, второй — верные}\} = 0{,}1 \cdot 0{,}7 = 0{,}07;$$

$$\mathsf{P}(A \mid H_2) = \mathsf{P}\{\text{первый источник дал верные сведения, второй — неверные}\} = 0{,}9 \cdot 0{,}3 = 0{,}27.$$

По формуле Бейеса

$$\mathsf{P}(H_1 \mid A) = \frac{0{,}7 \cdot 0{,}07}{0{,}7 \cdot 0{,}07 + 0{,}3 \cdot 0{,}27} = 0{,}377,$$

$$\mathsf{P}(H_2 \mid A) = 1 - \mathsf{P}(H_1 \mid A) = 0{,}623.$$

Итак, в результате анализа стала значительно более вероятной вторая гипотеза: объект не функционирует. ▶

Пример 6. Испытывается прибор, состоящий из двух узлов: 1 и 2. Надежности (вероятности безотказной работы за время τ) узлов 1 и 2 известны и равны $p_1 = 0{,}8$; $p_2 = 0{,}9$. Узлы отказывают независимо друг от друга. По истечении времени τ выяснилось, что прибор неисправен. Найти с учетом этого вероятности гипотез:

$$H_1 = \{\text{неисправен только первый узел}\};$$

$$H_2 = \{\text{неисправен только второй узел}\};$$

$$H_3 = \{\text{неисправны оба узла}\}.$$

Решение. До опыта возможны были не три, а четыре гипотезы, включая $H_0 = \{\text{исправны оба узла}\}$. Опыт показал, что имеет место одна из гипотез H_1, H_2, H_3, причем наблюденное событие A есть сумма этих гипотез:

$$A = H_1 + H_2 + H_3.$$

Априорные вероятности гипотез:

$$\mathsf{P}(H_1) = 0{,}2 \cdot 0{,}9 = 0{,}18;$$

$$\mathsf{P}(H_2) = 0{,}8 \cdot 0{,}1 = 0{,}08;$$

$$\mathsf{P}(H_3) = 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}02.$$

Условные вероятности

$$\mathsf{P}(A \mid H_1) + \mathsf{P}(A \mid H_2) + \mathsf{P}(A \mid H_3) = 1.$$

По формуле Бейеса находим апостериорные вероятности:

$$\mathsf{P}(H_1 \mid A) = \frac{0{,}18}{0{,}18 + 0{,}08 + 0{,}02} \approx 0{,}643;$$

$$\mathsf{P}(H_2 \mid A) = \frac{0{,}08}{0{,}18 + 0{,}08 + 0{,}02} \approx 0{,}286;$$

$$\mathsf{P}(H_3 \mid A) \approx 0{,}071. \ \blacktriangleright$$

Пример 7. Два стрелка независимо друг от друга стреляют по одной и той же мишени, делая каждый по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,8, для второго — 0,4. После стрельбы в мишени обнаружена одна пробоина. Найти вероятность того, что эта пробоина принадлежит первому стрелку *).

Решение. До опыта возможны следующие гипотезы:

H_1 = {ни первый, ни второй стрелки не попадут},
H_2 = {оба стрелка попадут},
H_3 = {первый стрелок попадет, а второй — нет},
H_4 = {первый стрелок не попадет, а второй попадет}.

Априорные вероятности гипотез:

$$\mathsf{P}(H_1) = 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}12; \quad \mathsf{P}(H_2) = 0{,}8 \cdot 0{,}4 = 0{,}32;$$
$$\mathsf{P}(H_3) = 0{,}8 \cdot 0{,}6 = 0{,}48; \quad \mathsf{P}(H_4) = 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}08.$$

Условные вероятности наблюденного события $A =$ = {в мишени одна пробоина} при этих гипотезах равны:

$$\mathsf{P}(A_1 \mid H_1) = 0; \quad \mathsf{P}(A \mid H_2) = 0;$$
$$\mathsf{P}(A \mid H_3) = 1; \quad \mathsf{P}(A \mid H_4) = 1.$$

После опыта гипотезы H_1 и H_2 становятся невозможными, а апостериорные вероятности гипотез H_3 и H_4 по формуле Бейеса будут:

$$\mathsf{P}(H_3 \mid A) = \frac{0{,}48 \cdot 1}{0{,}48 \cdot 1 + 0{,}08 \cdot 1} = \frac{6}{7};$$

$$\mathsf{P}(H_4) = 1 - \mathsf{P}(H_3 \mid A) = 1 - 6/7 = 1/7. \ \blacktriangleright$$

---

*) Исход {обе пробоины совпали} отбрасываем, как ничтожно маловероятный.