Формула Байеса

Начнем с примера. В урне, стоящей перед вами, **с равной вероятностью** могут быть (1) два белых шара, (2) один белый и один черный, (3) два черных. Вы тащите шар, и он оказывается белым. Как теперь вы оцените **вероятность** этих трех вариантов (гипотез)? Очевидно, что вероятность гипотезы (3) с двумя черными шарами = 0. А вот как подсчитать вероятности двух оставшихся гипотез!? Это позволяет сделать формула Байеса, которая в нашем случае имеет вид (номер формулы соответствует номеру гипотезы):

$$(1)\ \mathrm{P}(\mathrm{x}_1|\mathrm{y}_1) = \frac{P(y_1|x_1) \cdot P(x_1)}{P(\mathrm{y}_1)}$$

$$(2)\ \mathrm{P}(\mathrm{x}_2|\mathrm{y}_1) = \frac{P(y_1|x_2) \cdot P(x_2)}{P(\mathrm{y}_1)}$$

$$(3)\ \mathrm{P}(\mathrm{x}_2|\mathrm{y}_1) = \frac{P(y_1|x_3) \cdot P(x_3)}{P(\mathrm{y}_1)}$$

x – случайная величина (гипотеза), принимающая значения: x_1 – два белых, x_2 – один белый, один черный; x_3 – два черных; y – случайная величина (событие), принимающая значения: y_1 – вытащен белый шар и y_2 – вытащен чёрный шар; $P(x_1)$ – вероятность первой гипотезы до вытаскивания шара (**априорная** вероятность или вероятность **до** опыта) = $1/3$; $P(x_2)$ – вероятность второй гипотезы до вытаскивания шара = $1/3$; $P(x_3)$ – вероятность третьей гипотезы до вытаскивания шара = $1/3$; $P(y_1|x_1)$ – условная вероятность вытащить белый шар, в случае, если верна первая гипотеза (шары белые) = 1; $P(y_1|x_2)$ – вероятность вытащить белый шар, в случае, если верна вторая гипотеза (один шар белый, второй – черный) = ½; $P(y_1|x_3)$ – вероятность вытащить белый шар, в случае, если верна третья гипотеза (оба черных) = 0; $P(y_1)$ – вероятность вытащить белый шар = ½; $P(y_2)$ – вероятность вытащить черный шар = ½; и, наконец, то, что мы ищем – $P(x_1|y_1)$ – вероятность того, что верна первая гипотеза (оба шара белых), при условии, что мы вытащили белый шар (**апостериорная** вероятность или вероятность **после** опыта); $P(x_2|y_1)$ – вероятность того, что верна вторая гипотеза (один шар белый, второй – черный), при условии, что мы вытащили белый шар.

Вероятность того, что верна первая гипотеза (два белых), при условии, что мы вытащили белый шар:

$$(4)\ \mathrm{P}(\mathrm{x}_1|\mathrm{y}_1) = \frac{1 \cdot 1/3}{1/2} = 2/3$$

Вероятность того, что верна вторая гипотеза (один белый, второй – черный), при условии, что мы вытащили белый шар:

$$(5)\ \mathrm{P}(\mathrm{x}_2|\mathrm{y}_1) = \frac{1/2 \cdot 1/3}{1/2} = 1/3$$

Вероятность того, что верна третья гипотеза (два черных), при условии, что мы вытащили белый шар:

$$(6)\ \mathrm{P}(\mathrm{x}_3|\mathrm{y}_1) = \frac{0 \cdot 1/3}{1/2} = 0$$

Что делает формула Байеса? Она дает возможность на основании априорных вероятностей гипотез – $P(x_1)$, $P(x_2)$, $P(x_3)$ – и вероятностей наступления событий – $P(y_1)$, $P(y_2)$ – подсчитать апостериорные вероятности гипотез, например, вероятность первой гипотезы, при условии, что вытащили белый шар – $P(x_1|y_1)$.

Вернемся еще раз к формуле (1). Первоначальная вероятность первой гипотезы была $P(x_1) = 1/3$. С вероятностью $P(y_1) = 1/2$ мы могли вытащить белый шар, и с вероятностью $P(y_2) = 1/2$ – черный. Мы вытащили белый. Вероятность вытащить белый при условии, что верна первая гипотеза $P(y_1|x_1) = 1$. Формула Байеса говорит, что так как вытащили белый, то вероятность первой гипотезы возросла до 2/3, вероятность второй гипотезы по-прежнему равна 1/3, а вероятность третьей гипотезы обратилась в ноль.

Легко проверить, что вытащи мы черный шар, апостериорные вероятности изменились бы симметрично: $P(x_1|y_2) = 0$, $P(x_2|y_2) = 1/3$, $P(x_3|y_2) = 1$.

Вот что писал Пьер Симон Лаплас о формуле Байеса в работе 1814 г. Опыт философии теории вероятностей:

> *Это основной принцип той отрасли анализа случайностей, которая занимается переходами от событий к причинам.*

Почему формула Байеса так сложна для понимания!? На мой взгляд, потому, что наш обычный подход – это рассуждения от причин к следствиям. Например, если в урне 36 шаров из которых 6 черных, а остальные белые. Какова вероятность вытащить белый шар? Формула Байеса позволяет идти от событий к причинам (гипотезам). Если у нас было три гипотезы, и произошло событие, то как именно это событие (а не альтернативные) повлияли на первоначальные вероятности гипотез? Как изменились эти вероятности?

Я считаю, что формула Байеса не просто о вероятностях. Она изменяет парадигму восприятия. Каков ход мыслей при использовании детерминистской парадигмы? Если произошло событие, какова его причина? Если произошло ДТП, чрезвычайное происшествие, военный конфликт. Кто или что явилось их виной? Как думает байесовский наблюдатель? Какова структура реальности, приведшая в *данном* случае к такому-то проявлению… Байесовец понимает, что в *ином* случае результат мог быть иным…

Немного иначе разместим символы в формулах (1) и (2):

$$(7)\ \mathrm{P}(\mathrm{x}_1|\mathrm{y}_1) = \frac{P(y_1|x_1)}{P(\mathrm{y}_1)} P(x_1)$$

$$(8)\ \mathrm{P}(\mathrm{x}_2|\mathrm{y}_1) = \frac{P(y_1|x_2)}{P(\mathrm{y}_1)} P(x_2)$$

Давайте еще раз проговорим, что же мы видим. С равной исходной (априорной) вероятностью могла быть истинной одна из трех гипотез. С равной вероятностью мы могли вытащить белый или черный шар. Мы вытащили белый. В свете этой новой дополнительной информации следует пересмотреть нашу оценку гипотез. Формула Байеса позволяет это сделать численно. Априорная вероятность первой гипотезы (формула 7) была $P(x_1)$, вытащили белый шар, апостериорная вероятность первой гипотезы стала $P(x_1|y_1)$. Эти вероятности отличаются на коэффициент $\frac{P(y_1|x_1)}{P(\mathrm{y}_1)}$.

Событие y_1 называется свидетельством, в большей или меньшей степени подтверждающим или опровергающим гипотезу x_1. Указанный коэффициент иногда называют мощностью свидетельства. Чем мощнее свидетельство (чем больше коэффициент отличается от единицы), тем больше факт наблюдения y_1 изменяет априорную вероятность, тем больше апостериорная вероятность отличается от априорной. Если свидетельство слабое (коэффициент ~ 1), апостериорная вероятность почти равна априорной.

Свидетельство y_1 в $\frac{P(y_1|x_1)}{P(\mathrm{y}_1)} = 2$ раза изменило априорную вероятность гипотезы x_1 (формула 4). В то же время свидетельство y_1 не изменило вероятность гипотезы x_2, так как его мощность $\frac{P(y_1|x_2)}{P(\mathrm{y}_1)} = 1$ (формула 5).

В общем случае формула Байеса имеет следующий вид:

$$(9)\ \mathrm{P}(\mathrm{x}_i|\mathrm{y}_j) = \frac{P(y_j|x_i) \cdot P(x_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(y_j|x_k) P(x_k)}$$

x – случайная величина (набор взаимоисключающих гипотез), принимающая значения: $x_1, x_2, \dots, x_n$. y – случайная величина (набор взаимоисключающих событий), принимающая значения: $y_1, y_2, \dots, y_n$. Формула Байеса позволяет найти апостериорную вероятность гипотезы x_i при наступлении события y_j. В числителе – произведение априорной вероятности гипотезы x_i – $P(x_i)$ на вероятность наступления события y_j, если верна гипотеза x_i – $P(y_j|x_i)$. В знаменателе – сумма произведений того же, что и в числителе, но для всех гипотез. Если вычислить знаменатель, то получим суммарную вероятность наступления события y_j (если верна любая из гипотез) – $P(y_j)$ (как в формулах 1–3).

Еще раз о свидетельстве. Событие y_j дает дополнительную информацию, что позволяет пересмотреть априорную вероятность гипотезы x_i. Мощность свидетельства – $\frac{P(y_j|x_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(y_j|x_k)P(x_k)}$ – содержит в числителе вероятность наступления события y_j, если верна гипотеза x_i. В знаменателе – суммарная вероятность наступления события y_j (или вероятность наступления события y_j усредненная по всем гипотезам). Если вероятность наступления события y_j выше для гипотезы x_i, чем в среднем для всех гипотез, то свидетельство играет на руку гипотезе x_i, увеличивая ее апостериорную вероятность $P(y_j|x_i)$. Если вероятность наступления события y_j ниже для гипотезы x_i, чем в среднем для всех гипотез, то свидетельство понижает, апостериорную вероятность $P(y_j|x_i)$ *для* гипотезы x_i. Если вероятность наступления события y_j для гипотезы x_i такая же, как в среднем для всех гипотез, то свидетельство не изменяет апостериорную вероятность $P(y_j|x_i)$ *для* гипотезы x_i.

Предлагаю вашему вниманию несколько примеров, которые, надеюсь, закрепят ваше понимание формулы Байеса.

Задача 1.[1] Имеется 3 урны; в первой 3 белых шара и 1 черный; во второй — 2 белых шара и 3 черных; в третьей — 3 белых шара. Некто подходит наугад к одной из урн и вынимает из нее 1 шар. Этот шар оказался белым. Найдите апостериорные вероятности того, что шар вынут из 1-й, 2-й, 3-й урны. Ответ 1.

Задача 2. Два стрелка независимо друг от друга стреляют по одной и той же мишени, делая каждый по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,8, для второго — 0,4. После стрельбы в мишени обнаружена одна пробоина. Найти вероятность того, что эта пробоина принадлежит первому стрелку. Ответ 2.

Задача 3. Объект, за которым ведется наблюдение, может быть в одном из двух состояний: H_1 = {функционирует) и H_2 = {не функционирует). Априорные вероятности этих состояний $P(H_1) = 0,7$, $P(H_2) = 0,3$. Имеется два источника информации, которые приносят разноречивые сведения о состоянии объекта; первый источник сообщает, что объект не функционирует, второй — что функционирует. Известно, что первый источник дает правильные сведения с вероятностью 0,9, а с вероятностью 0,1 — ошибочные. Второй источник менее надежен: он дает правильные сведения с вероятностью 0,7, а с вероятностью 0,3 — ошибочные. Найдите апостериорные вероятности гипотез. Ответ 3.

Задача 4.[2] Вероятность того, что человек страдает от определенного заболевания, равна 0,03. Медицинский тест позволяет проверить, так ли это. Если человек действительно болен, вероятность точного диагноза (утверждающего, что человек болен, когда он действительно болен) равна 0,9. Если человек здоров, вероятность ложноположительного диагноза (утверждающего, что человек болен, когда он здоров) равна 0,02. Допустим, что медицинский тест дал положительный результат. Какова вероятность того, что человек действительно болен? Ответ 4.

---

[1] Задачи 1–3 взяты из учебника Е.С.Вентцель, Л.А.Овчаров. Теория вероятностей и ее инженерные приложения, раздел 2.6 Теорема гипотез (формула Байеса).

[2] Задача 4 взята из книги [Левин. Статистика для менеджеров с использованием Microsoft Excel], раздел 4.3 Теорема Байеса.