

Парадокс Кондорсе, теорема Эрроу, или Как мы принимаем решения

Некоторое время назад прочитал книгу Ричарда Румельта [Хорошая стратегия, плохая стратегия. В чем отличие и почему это важно](#). Меня заинтересовал фрагмент, в котором описывается проблема выбора из нескольких альтернатив. Которая, в свою очередь, затрагивает парадокс Кондорсе и теорему Эрроу. Если популярно, то *коллективный выбор из более чем двух альтернатив подвержен странностям*. Желательно выбирать из двух альтернатив. Любопытно, были ли знакомы с этими закономерностями в Англии и США, когда основывали свою политическую систему на двух партиях!?! 😊

	Алек	Беверли	Крейг
«Железо»	1	2	3
«Чипы»	2	3	1
«Решения»	3	1	2

Рис. 1. Предпочтения в выборе альтернатив

Нежелание или неспособность сделать выбор

Выбор означает умение отказываться от одних целей в пользу других. Если этот процесс в организации не выполняется, результат предсказуем — слабая аморфная стратегия. В начале 1992 года Ричард Румельт присутствовал на обсуждении стратегии, в котором принимали участие руководители высшего звена [Digital Equipment Corporation](#) (далее DEC); речь шла о будущем направлении развития компании. DEC по праву считалась в 1960–1970-е годы первопроходцем в области микрокомпьютеров и разработок удобных для пользователя операционных систем. Но 90-е годы рынок менялся и руководство DEC терзали вполне обоснованные сомнения: сможет ли компания выжить без кардинальных изменений.

На собрании присутствовал целый ряд влиятельных лиц, высказывавших много идей. Вы услышите голоса лишь трех воображаемых управляющих — назовем их Алек, Беверли и Крейг, — каждый из них высказался в пользу отдельного направления развития. Алек считал, что DEC была и останется ИТ-компанией, специализирующейся на интеграции аппаратного и программного обеспечения в практичные, удобные в применении системы.

Беверли высмеяла идею Алека, окрестив его стратегию «Железо». По ее мнению, «железо» стало обычным предметом потребления и вряд ли способно обеспечить существенное конкурентное преимущество. Единственный реальный ресурс, на базе которого DEC может и должна развиваться, — это взаимоотношения с клиентами. В связи с этим Беверли настаивала на стратегии, которая позволила бы эффективнее решать проблемы клиентов компании. Участники собрания назвали ее стратегией «Решения».

Крейг не поддерживал ни Алека, ни Беверли, поскольку был убежден, что сердце компьютерной индустрии — это полупроводниковые технологии. По его мнению, компании следует сосредоточить свои ресурсы на проектировании и создании новых полупроводников. Естественно, его стратегия получила название «Чипы». Считая, что в вопросах взаимоотношений с клиентами DEC не обладала отличительными компетенциями, Крейг заявил: «У нас довольно сложностей с решением собственных проблем». Алек и Беверли со стратегией Крейга не соглашались, так как полагали, что DEC никогда не сравнится с такими монстрами в области разработки и выпуска микрочипов, как IBM или Intel.

Не лучше было бы прекратить прения и попытаться реализовать все три стратегии? Нет, не лучше. Во-первых, когда люди хотят разрешить конфликт мнений, приняв все предлагаемые варианты, у них напрочь пропадает стимул дорабатывать свои аргументы и выдвигать новые. Только перспектива выбора вдохновляет их тщательно продумывать и четко описывать плюсы своих предложений и минусы идей оппонентов. Во-вторых, стратегии Крейга («Чипы») и Беверли («Решения») предполагали серьезные преобразования в компании; каждая из них требовала создания и развития принципиально новых навыков и методов работы. Обе эти рискованные альтернативы могли быть выбраны, только если бы не прошла стратегия «Железо», сохраняющая удобный статус-кво. И конечно, никто не стал бы одновременно реализовывать стратегии «Чипы» и «Решения», поскольку между ними нет точек соприкосновения. Это нецелесообразно и, по сути, невозможно — организовать и осуществить в компании сразу два фундаментальных преобразования.

В таблице (рис. 1) отображено, как Алек, Беверли и Крейг расставили три альтернативные стратегии развития DEC в порядке своих предпочтений. Данный рейтинг — яркий пример явления, известного под названием [парадокс Кондорсе](#).

[Николя де Кондорсе](#) (1743–1794) — французский философ, математик, академик и политический деятель. Кондорсе впервые применил математические методы к общественным наукам. В 1785 он опубликовал одну из наиболее известных своих работ «Рассуждения о применении анализа к оценке выборов большинством голосов». В работе были впервые изложен принцип Кондорсе — алгоритм голосования с учётом всех предпочтений, устраняющий ошибки коллективного выбора, в том случае если коллективный выбор в принципе возможен. Там же был описан «парадокс Кондорсе» — возможная не транзитивность (противоречивость) коллективного выбора избирателей при транзитивности выбора каждого избирателя. Парадокс возможен в случае трёх и более вариантов выбора. Работа Кондорсе положила начало целому направлению математических исследований в области социологии, психологии, политики и экономики.

На первом этапе голосования, когда его участники выбирали между стратегиями «Железо» и «Чипы», Алек и Беверли предпочли «Железо», и данная стратегия одержала верх. Далее «Железо» сравнивалось с «Решениями»; и Беверли и Крейг выбрали «Решения», обеспечив победу этой стратегии. Таким образом, «Решения» побеждают «Железо», а «Железо» — «Чипы». Глядя на результаты, можно подумать, что голосующие должны предпочесть победителя двух туров — стратегию «Решения», проигравшую в первом туре стратегии «Чипы». Но, делая выбор между «Решениями» и «Чипами», и Алек, и Крейг голосуют за «Чипы», и те побеждают «Решения». Именно в этом заключается парадокс Кондорсе: при наличии более двух альтернатив и более двух голосующих коллективная оценка вариантов, как правило, становится циклической.

Можно попытаться решить эту задачу с применением более сложной схемы голосования. Например, трое голосующих могли бы взвесить свои предпочтения, а потом тем или иным образом объединить полученные значения. Но бесплодность подобных попыток еще в середине прошлого столетия доказал экономист [Кеннет Эрроу](#), получивший в 1972 году Нобелевскую премию. Групповая иррациональность данного типа является основной отличительной характеристикой демократического голосования — факт, который преподаватели теории государства и права предпочитают замалчивать.

[Теорема Эрроу](#) о невозможности «коллективного выбора». Сформулирована в 1951 году. Смысл этой теоремы состоит в том, что в рамках ординалистского подхода не существует метода объединения индивидуальных предпочтений для трёх и более альтернатив, который удовлетворял бы некоторым вполне справедливым условиям и всегда давал бы логически непротиворечивый результат. Ординалистский подход основывается на том, что предпочтения индивидуума относительно предлагаемых к выбору альтернатив не могут измеряться количественно, а только качественно, то есть одна альтернатива хуже или лучше другой. В рамках кардиналистского подхода, предполагающего количественную измеримость предпочтений, теорема Эрроу в общем случае не работает. Подробнее см. [Кеннет Джозеф Эрроу. Коллективный выбор и индивидуальные ценности](#).

Руководители DEC не проводили официально никакого голосования, но в их неспособности сформировать стабильную коалицию большинства явно ощущался эффект парадокса Кондорсе. Когда любые два участника голосования пытались договориться, образуя в итоге большинство, один из них тут же испытывал искушение дезертировать и объединить силы с третьим, чтобы сформировать другое большинство, лучше соответствующее его желаниям и интересам. Предположим, что Беверли и Крейг создали коалицию для поддержки стратегии «Решения». Поскольку она была для Крейга вторым по предпочтению вариантом, он сразу почувствовал бы искушение переменить и объединиться с Алеком, создав большинство в поддержку своей стратегии «Чипы». Но и эта коалиция оказалась бы неустойчивой, ибо Алеку наверняка захотелось бы сговориться с Беверли, чтобы упрочить позиции «Железа», и так далее по циклу до бесконечности.

В 1998 году Compaq купила находившуюся в тяжёлом финансовом положении Digital Equipment Corporation. В свою очередь, компания Compaq прекратила самостоятельное существование в 2002 году, когда ее поглотила компания Hewlett-Packard. В 2015 г. компания Hewlett-Packard была разделена на две компании: HP Inc. и Hewlett Packard Enterprise. Идет подготовка к продаже!?

Ни одна избирательная система не идеальна

А вот еще одно объяснение теоремы Эрроу.

Согласно одному из ключевых утверждений в теории общественного выбора, ни одна последовательная и справедливая избирательная система не способна привести к разумному результату.¹ Теорема Эрроу вначале устанавливает разумные условия голосования для того, чтобы собрать различные предпочтения индивидов в единое предпочтение группы.

Такие условия могут привести к абсурдным решениям или явно недемократичному их принятию. Вот как изложили это в своей книге «Анализируя политику» политологи Кен Шепсле и Марк Боншек: «Либо в группе доминирует один выделяющийся индивид, либо в ней складываются нетранзитивные предпочтения». По этой причине теорему иногда называют «диктаторской». Чтобы понять теорему Эрроу, нужно сперва разобраться, какой смысл экономисты и политологи вкладывают в понятие «нетранзитивные предпочтения».

Транзитивные соотношения — это соотношения больше/меньше в математике. Если $a > b$, и $b > c$, то $a > c$. Или старшинство игральных карт: если туз старше короля, а король старше валета, то туз старше валета. Нетранзитивные соотношения — это игра «камень–ножницы–бумага». Камень выигрывает у ножниц, ножницы выигрывают у бумаги, но при этом камень проигрывает бумаге.

Эрроу пытался создать систему голосования, которая была бы последовательной и справедливой, и которая приводила бы к транзитивным групповым предпочтениям при выборе из более чем двух вариантов. Но пытаясь создать такую систему голосования, он доказал, что она невозможна. Условия, которые задал Эрроу для создания логичной и справедливой системы голосования, могут быть описаны следующим образом:

- 1) Каждый избиратель может иметь любой набор логичных предпочтений. Это требование называется «универсальной приемлемостью».
- 2) Если каждый голосующий предпочитает А Б, то тогда вся группа выбирает А, а не Б. Это называется состоянием «единогласия».
- 3) Если каждый голосующий предпочитает А Б, то любое изменение в предпочтениях, которое не влияет на это отношение, не должно влиять на групповое предпочтение. Например, если группа учёных единогласно решает, что Абрахам Линкольн был президентом лучше, чем Честер Артур, то их отношение к Биллу Клинтону никак не должно повлиять на это решение. Такое требование называется «независимостью от посторонних альтернатив».
- 4) Отсутствие диктатора.

Теорема Эрроу утверждает, что, выбирая между более чем двумя вариантами, невозможно соблюсти все эти четыре условия, не создавая при этом циклических групповых предпочтений. Что ещё ужаснее, транзитивность групповых предпочтений при соблюдении первых трёх условий неизбежно приводит к диктатуре.

Формальное доказательство теоремы потребовало бы углубиться в математику, но проблему можно легко проиллюстрировать мажоритарной избирательной системой. В ней люди голосуют только за наиболее предпочтительного кандидата, и кандидат, набравший наибольшее количество голосов, побеждает. Но проблема в том, что у победителя может быть меньше 50% голосов.

Рассмотрим президентские выборы в США 1992 года. Билл Клинтон выиграл выборы с 43% голосов избирателей. Дж. Буш–старший набрал около 38% голосов, а Росс Перо — около 19%. Теперь предположим, что все избиратели Перо проголосовали бы за Буша, если бы Перо не выдвигал свою кандидатуру. Тогда бы Буш выиграл выборы с 57% голосов. Этот результат нарушает условие независимости от посторонних альтернатив.

Аналогичные проблемы существуют и во всех других системах голосования, поэтому эксперты работают над тем, чтобы выяснить, какие условия можно смягчить, чтобы создать разумный порядок голосования. Большинство учёных считают условия «единогласного» согласия и отсутствия «диктата» священными. Таким образом, основное внимание сосредоточено на условиях посторонних альтернатив и, что более важно, на том, как часто отдельные системы сталкиваются с проблемами.

¹ Цитируется по [Теорема Эрроу, доказывающая, что ни одна избирательная система не идеальна](#)

Мажоритарная система, например, не так часто приводит к нетранзитивным предпочтениям, как вы могли бы подумать. Шепсле и Боншек подсчитали, что в выборах из трёх кандидатов с тремя избирателями только 12 договоренностей из 216 возможных привели к нетранзитивным групповым предпочтениям.

Некоторые утверждают, что другие системы голосования (не мажоритарные) являются менее склонными к ошибкам. Двухтуровая система и кембриджская система пропорционального представительства устраняют кандидатов с низким рейтингом (типа Перо), и голоса распределяются среди остальных кандидатов. По такому принципу организована процедура выбора города для проведения Олимпийских игр.²

Каждый метод обладает преимуществами, но в каждом гарантированно есть и недостатки, парадоксальные результаты, необходимые для теоремы Эрроу. Практический вопрос для политиков и избирателей состоит в том, какая из этих избирательных систем реже всего приводит к подобным проблемам.

Альтернатива демократии?

Любопытную систему голосования описывают Стивен Левитт и Стивен Дабнер в книге [Когда грабить банк и другие лайфхаки](#), вышедшую на английском языке в 2015 г.

...На носу президентские выборы, и у всех американцев на уме политика. Но экономисты, в отличие от большинства людей, равнодушны к голосованию. Ведь шансы на то, что индивидуальный голос повлияет на результат выборов, ничтожно малы. А значит, если вы не любитель выборов, вам нет и особого смысла голосовать. К тому же есть ряд теоретических выкладок. Самая известная из них — теорема Эрроу, которая показывает, сколь сложно изобрести политические системы (и механизмы голосования), которые надежным образом объединяли бы предпочтения избирателей.

Эти теоретические выкладки о плюсах и минусах демократии большей частью навевают зевоту. Однако прошлой весной мой коллега Глен Вейл высказал идею столь простую, что я даже поразился: как же она никому в голову не приходила? А именно: каждый избиратель может голосовать столько раз, сколько ему вздумается. Однако есть хитрость: при каждом голосовании нужно платить, и сумма выплаты составляет квадрат суммы поданных им голосов. Следовательно, каждый дополнительный голос стоит больше, чем предыдущий. Допустим, первый голос обойдется вам в доллар. Тогда за второй голос надо будет заплатить \$4. За третий — \$9, за четвертый — \$16 и т. д. Сто голосов будут стоить \$10,000. Значит, как бы вам ни нравился кандидат, бесконечное число раз вы голосовать не сможете.

Чем хороша эта система? Чем больше людям безразличны результаты выборов, тем больше раз они будут голосовать. Система учитывает не только то, какого кандидата вы предпочитаете, но и то, насколько он предпочтительнее. С учетом предпосылок Глена, такой расклад Парето-эффективен: состояние ни одного члена общества не может быть улучшено без ухудшения положения других лиц.

Вы скажете, что это на руку богачам. Если сравнивать с нынешней системой — да, пожалуй. Но экономист может высказать непопулярное мнение: богачи и так потребляют больше остальных — почему бы им не потреблять больше политического влияния? Возьмем нынешнюю систему пожертвований на президентскую кампанию. Очевидно, что богачи уже обладают гораздо большим влиянием, чем бедняки. Поэтому ограничение предвыборных трат в связи с упомянутой системой может быть демократичнее, чем имеющаяся система.

Еще один возможный довод против: система Глена дает сильный стимул к подкупу избирателей. Гораздо дешевле купить первые голоса множества незаинтересованных граждан, чем платить за собственное сотое голосование. Как только мы будем оценивать голоса в долларах, люди начнут рассматривать голоса в свете финансовых операций и захотят их продавать и покупать.

Конечно, наша практика («один человек — один голос») давно устоялась. Поэтому весьма сомнительно, что идею Глена опробуют на крупных политических выборах. Но два других экономиста, Якоб Гуре и

² Чтобы получить право организации Игр, город-претендент должен собрать большинство голосов членов МОК, присутствующих на сессии (половину голосов плюс 1 голос). Если ни один из городов-кандидатов не соберет необходимого большинства голосов, тогда тот из них, за который подано меньшее количество голосов, исключается из числа кандидатов и проводится новый тур голосования. Процедура повторяется, пока город-претендент не наберет половину голосов плюс 1 голос.

Цзинцзин Чжан, исследовали схожий («аукционный») подход в лаборатории. Он не просто хорошо работает — участники даже склонны предпочитать его традиционной системе голосования.

Данная система подходит для любого случая, когда люди делают выбор между двумя возможностями: скажем, какой из двух фильмов посмотреть, или в какой ресторан пойти, или какой телевизор купить для квартиры. В подобных ситуациях денежный фонд, собранный при голосовании, делится и перераспределяется между всеми участниками. Не хотите попробовать?

Мудрость толпы

В [одноименной книге](#) Джеймс Шуровьески приводит условия, необходимые для того, чтобы толпа была мудрой: разнородность, независимость и особый тип децентрализации. Разнородность и независимость важны потому, что самые верные коллективные решения — это продукт противоречий и споров, а не согласия или компромисса. В правильно организованной (разумной) группе, особенно перед лицом когнитивных проблем, участников не призывают изменить свои предложения для достижения приемлемого для всех решения. Вместо этого задействуются механизмы (скажем, рыночные цены или интеллектуальные системы голосования), позволяющие собрать воедино все мнения и вывести из них усредненные коллективные суждения, демонстрирующие не то, как думает какой-либо участник группы, а фактически то, как думают они все вместе. Парадоксально, но лучший способ для группы стать разумной — позволить каждому ее участнику думать и действовать как можно более независимо.

Система с выбыванием – не панацея

А вот что пишут на эту тему Авинаш Диксит и Барри Нейлбафф в книге [Теория игр](#). Самый распространенный метод голосования — простым большинством. Однако мажоритарная система выборов дает порой парадоксальные результаты. На самом деле принцип большинства вполне эффективен в процессе выборов с участием двух кандидатов. Проблемы начинают возникать, когда в избирательный бюллетень включены три кандидата или более. Во время президентских выборов 2000 года присутствие Ральфа Нейдера в избирательном бюллетене склонило ситуацию со стороны Эла Гора в сторону Джорджа Буша. У Нейдера было 97 488 голосов во Флориде, а Буш победил с перевесом 537 голосов. Не нужно особого воображения, чтобы понять: подавляющее большинство тех избирателей, которые голосовали за Нейдера, предпочли бы Гора Бушу.

Особенность мажоритарной системы впервые обнаружил герой Французской революции маркиз де Кондорсе (1743–1794). В его честь мы проиллюстрируем фундаментальный парадокс принципа простого большинства на примере революционной Франции. Кто должен был стать новым лидером Франции после падения Бастилии? Предположим, на этот пост претендуют три кандидата: господин Робеспьер (Р), господин Дантон (Д) и госпожа Лафарж (Л). Население разделено на три группы (левые, центристы и правые) со следующими предпочтениями (рис. 2).

Левые	Центристы	Правые
40	25	35
Р	Д	Л
Д	Л	Р
Л	Р	Д

Рис. 2. Предпочтения населения

В голосовании принимают участие 40 левых, 25 центристов и 35 правых избирателей. В выборе между Робеспьером и Дантоном одержит верх Робеспьер с 75 голосами против 25. В выборе между Робеспьером и Лафарж победит последняя с соотношением голосов 60 против 40. Но в выборе между мадам Лафарж и Дантоном победа достанется Дантону с перевесом 65 против 35 голосов.

Кондорсе предложил определять итоги выборов по следующему принципу: подавляющее большинство голосов имеет приоритет над незначительным перевесом голосов. Согласно этой логике, победу Робеспьера над Дантоном с перевесом голосов 75 против 25 следует считать более приоритетной по сравнению с победой мадам Лафарж над Робеспьером, полученной простым большинством голосов — 60 против 40. Следовательно, Робеспьер — самый лучший кандидат, а незначительное большинство избирателей, отдающих предпочтение мадам Лафарж перед Робеспьером, — это ошибка. Таким образом, Робеспьера необходимо объявить победителем.

По иронии судьбы во Франции сейчас применяется другая система, которую часто называют выборами в два тура. Если во время первого тура выборов ни один из кандидатов не получает абсолютного большинства голосов, два кандидата с максимальным числом голосов продолжают борьбу друг с другом во втором туре. Представьте себе, что произошло бы, если бы мы применили французскую систему выборов в нашем примере с тремя кандидатами. В первом раунде лидировал бы Робеспьер, получивший 40 голосов; мадам Лафарж заняла бы второе место (35 голосов), а Дантон оказался бы последним (25 голосов).

Учитывая эти результаты, Дантон будет исключен из дальнейшей борьбы, а два других кандидата, получившие больше голосов, встретятся во втором туре. Можно предположить, что во втором туре сторонники Дантона отдадут свои голоса мадам Лафарж, которая победит в выборах с перевесом голосов 60 против 40. **Это еще раз подтверждает, что процедура голосования определяет исход выборов в не меньшей степени, чем предпочтения избирателей.**

Процедура, которую разработал Кондорсе, позволяет решить проблему голосования во время первичных или даже всеобщих выборов с участием трех или более кандидатов. Кондорсе предлагал определять победителя выборов посредством попарного сравнения кандидатов. При такой системе голосования президентские выборы 2000 года проходили бы так: Буш против Гора, Буш против Нейдера, Гор против Нейдера. Победителем выборов стал бы кандидат с наименьшим максимумом голосов против него.

Представьте себе, что Гор победил бы Буша с соотношением голосов 51 против 49; Гор победил Нейдера с соотношением 80 против 20, а Буш победил Нейдера с соотношением 70 против 30 голосов. В таком случае максимальное число голосов против Гора было бы 49, а это меньше максимального числа голосов против Буша (51) или Нейдера (80). По существу, Гор стал бы победителем выборов по системе Кондорсе, поскольку он превзошел остальных кандидатов в противостоянии один на один.

Существует простой подход, позволяющий реализовать такую систему голосования на практике. Все, что нужно сделать избирателям, — ранжировать кандидатов в избирательном бюллетене по степени их предпочтительности для избирателя. На основании такого рейтинга компьютер определит итоги голосования по каждой паре кандидатов.