**Комбинаторика в Excel**

[Комбинаторика](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D0%BC%D0%B1%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%B8%D0%BA%D0%B0) — раздел математики, изучающий дискретные объекты, множества (сочетания, перестановки, размещения элементов) и отношения на них. Термин *комбинаторика* был введён в математический обиход Лейбницем, который в 1666 году опубликовал свой труд «Рассуждения о комбинаторном искусстве». Excel поддерживает ряд функций комбинаторики. Чтобы разобраться, какую формулу использовать, следует ответить на ряд вопросов:

1. Исходное множество содержит только уникальные элементы, или некоторые из них могут повторяться?
2. Операция выполняется со всеми элементами множества, или только с некоторой выборкой из них?
3. Важен ли порядок элементов в выборке?
4. После выбора элемента мы его возвращаем назад?

Нет

Нет

Да

Нет

Да

Нет

Да

Да

Нет

Да

Да

Нет, с выборкой

Рис. 1. Дерево решений, какую формулу комбинаторики использовать

### Перестановки без повторений

Возьмем несколько *различных* элементов (предметов) и будем переставлять их всевозможными способами, оставляя неизменным их число и меняя только их порядок (рис. 2). Каждая из получившихся таким образом комбинаций носит название *перестановки*. Перестановкой из n элементов называется **упорядоченное** множество, составленное из всех элементов множества.



Рис. 2. Перестановки (понравившаяся картинка взята [здесь](https://www.fxyz.ru/%D1%84%D0%BE%D1%80%D0%BC%D1%83%D0%BB%D1%8B_%D0%BF%D0%BE_%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B5/%D0%BA%D0%BE%D0%BC%D0%B1%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%B8%D0%BA%D0%B0/%D1%81%D0%BE%D0%B5%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F/%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%B5%D1%81%D1%82%D0%B0%D0%BD%D0%BE%D0%B2%D0%BA%D0%B8_%D1%84%D0%B0%D0%BA%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%B8%D0%B0%D0%BB/))

Если все n элементы разные, то число перестановок обозначается Pn от perturbation.$ $

$$\left(1\right) P\_{n}=n∙\left(n–1\right)∙\left(n–2\right)∙…∙2∙1=n!$$

С другой стороны, произведение *n* первых натуральных чисел называется n-факториал и обозначается n!

$$\left(2\right) n!=1\*2\*3\*…\*\left(n –1\right)\*n$$

Например

$$\left(2а\right) 5!=1\*2\*3\*4\*5=120$$

По определению: 1! = 1; 0! = 1.

Функция в Excel =ФАКТР(n). Факториал растет очень быстро. Существенно быстрее экспоненты (рис. 3).



Рис. 3. Расчет числа перестановок без повторений с помощью факториала

### Перестановки с повторениями

Если в основном n множестве не все элементы разные, то число перестановок будет меньше n! Например, если наше множество состоит из трех яблок и одной груши, то всего возможно 4 перестановки (рис. 4). Груша может быть первой, второй, третьей или четвертой, а яблоки неразличимы).



Рис. 4. Перестановки с повторениями (картинка найдена [здесь](http://pinskolimp.blogspot.com/p/blog-page_29.html))

В общем случае, можно сказать: последовательность длины n, составленная из k разных символов, первый из которых повторяется n1 раз, второй – n2 раз, третий – n3 раз, …, k-й – nk раз (где n1 + n2 + … + nk = n) называется перестановкой с повторениями из n элементов.

$$\left(3\right) \overbar{P}\left(n\_{1},n\_{2},…,n\_{k}\right)=\frac{n!}{n\_{1}!∙n\_{2}!∙…∙n\_{k}!}$$

Пример. Сколько различных пятибуквенных слов можно составить из букв слова «манна»?

Решение. Буквы *а* и *н* повторяются 2 раза, а буква *м* один раз.

$$\left(3а\right) \overbar{P}\left(2,2,1\right)=\frac{5!}{2!∙2!∙1!}=30$$

### Размещение без повторений

Размещением из n элементов по m называется упорядоченный набор из m различных элементов, выбранных из n-элементного множества (все элементы множества уникальны; позиции элементов в выборке важны). Число размещений обозначается$ A\_{n}^{m}$ от arrangement.

$$\left(4\right) A\_{n}^{m}= n∙\left(n–1\right)∙\left(n–2\right)∙…∙\left(n–m+1\right)= \frac{n!}{\left(n –m\right)!}$$

Например, два элемента из трех можно выбрать и расположить шестью способами (рис. 4):

$$\left(4а\right) A\_{3}^{2}= 3∙2=6 или$$

$$ A\_{3}^{2}= \frac{3!}{\left(3 –2\right)!}= \frac{3!}{1!}= \frac{1∙2∙3}{1}=6$$



Рис. 5. Размещение без повторений (картинка из [презентации](http://present5.com/kombinatorika-pravila-i-formuly-pravilo-summy/))

Если m = n количество элементов совпадает с количеством имеющихся мест для размещения. Знаменатель в формуле (4) превращается в 0! = 1. Остается только числитель n! А это – изученная выше перестановка без повторений; см. формулу (1).

Название функции в Excel несколько обескураживает. Но... что поделаешь: =ПЕРЕСТ(n;m)



Рис. 6. Размещение без повторений; обратите внимание на смешанные ссылки, которые позволяют протянуть формулу на всю таблицу

### Размещение с повторениями

Размещение с повторениями по смыслу отличается от перестановок с повторением. Перестановки с повторением – это операция над множеством, которое состоит из нескольких видов элементов, так что каждый вид представлен несколькими одинаковыми элементами. Размещение с повторениями – выборки из множества с возвращением выбранного элемента назад перед каждым новым выбором.

Например, если у вас множество, включающее грушу, яблоко и лимон, и вам нужно выбрать два элемента, так что после первого выбора вы возвращаете выбранный предмет назад, то существует девять различных комбинаций (рис. 7).



Рис. 7. Размещение с повторениями

В общем случае *размещение с повторениями* или *выборка с возвращением* – это размещение «предметов» в предположении, что каждый «предмет» может участвовать в размещении несколько раз. По правилу умножения количество размещений с повторениями из n по k:

$$\left(5\right)\overbar{ A\_{n}^{k}}= n^{k}$$

Задача. Сколько различных номеров можно составить в одном коде региона?

Подсказка. В номере используется 12 букв алфавита, также существующих и в латинском алфавите (А, В, Е, К, М, Н, О, Р, С, Т, У, Х).



Рис. 8. [Номер автомобиля](http://pravo-auto.com/kak-rasshifrovyvayutsya-bukvy-na-nomerah-mashin/)

Решение. Можно воспользоваться формулой для размещения с повторениями:

$$\left(5а\right) Число номеров= 10^{3}∙12^{3}= 1 728 000$$

Каждую цифру можно выбрать 10 способами, а всего цифр 3, при этом они могут повторяться, и их порядок важен. Каждую букву можно выбрать 12 способами, при этом буквы могут повторяться, и их порядок важен.

### Сочетания без повторений

Сочетаниями из n множества по m элементов называются комбинации, составленные из данных n элементов по m элементов, которые различаются хотя бы одним элементом (в сочетаниях не учитывается порядок элементов).

$$\left(6\right) С\_{n}^{m}= \frac{n!}{m!∙\left(n –m\right)!}$$

Например, два элемента из 4 сочетаются 6 способами (порядок следования не важен):

$$\left(6а\right) С\_{4}^{2}= \frac{4!}{2!∙\left(4 –2\right)!}= \frac{1∙2∙3∙4}{1∙2∙1∙2}=6$$



Рис. 9. [Сочетания без повторений](https://www.matburo.ru/tvart_sub.php?p=calc_C) из 4 по 2

Сочетания без повторений образуют знаменитый [треугольник Паскаля](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D1%80%D0%B5%D1%83%D0%B3%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B8%D0%BA_%D0%9F%D0%B0%D1%81%D0%BA%D0%B0%D0%BB%D1%8F) (рис. 10). В этом треугольнике на вершине и по бокам стоят единицы. Каждое число равно сумме двух расположенных над ним чисел. Строки треугольника симметричны относительно вертикальной оси. Числа в строках, составляющие треугольник Паскаля, являются сочетаниями

$$\left(7\right) С\_{n}^{m}= \frac{n!}{m!∙\left(n –m\right)!}$$

где n – номер строки, m – номер элемента в строке, начиная с нулевого. Например, в строке 7:

$$\left(7а\right) С\_{7}^{0}= \frac{7!}{0!∙\left(7 –0\right)!}=1; С\_{7}^{1}= \frac{7!}{1!∙\left(7 –1\right)!}=7; С\_{7}^{2}= \frac{7!}{2!∙\left(7 –2\right)!}= \frac{6∙7}{2}=21$$

$$ С\_{7}^{3}= \frac{7!}{3!∙\left(7 –3\right)!}=\frac{5∙6∙7}{2∙3}=35; С\_{7}^{4}= \frac{7!}{4!∙\left(7 –4\right)!}= \frac{4∙5∙6∙7}{2∙3∙4}=35; …$$



Рис. 10. Треугольник Паскаля

В Excel используется функция =ЧИСЛКОМБ(n;m).

### Сочетания с повторениями

Сочетания с повторениями по смыслу похожи на размещение с повторениями – это выборки из множества с возвращением выбранного элемента назад перед каждым новым выбором. При этом порядок в выборке не важен.

Например, два предмета из четырех можно выбрать 10 способами, если после каждого выбора предмет возвращается назад (рис. 11).



Рис. 11. [Сочетания с повторениями](http://pinskolimp.blogspot.com/p/blog-page_29.html)

В общем случае, число сочетаний с повторениями:

$$\left(8\right)\overbar{ С\_{n}^{k}}= \frac{\left(n+k –1\right)!}{k!∙\left(n –1\right)!}$$

Для нашего примера с фруктами

$$\left(8а\right)\overbar{ С\_{4}^{2}}= \frac{\left(4+2 –1\right)!}{2!∙\left(4 –1\right)!}= \frac{1∙2∙3∙4∙5}{1∙2∙1∙2∙3}= 10$$

В Excel для подсчета числа сочетаний с повторениями используется функция =ЧИСЛКОМБА(n;m). В нашем примере =ЧИСЛКОМБА(4;2) = 10.