## Стандартное отклонение и стандартная ошибка

Я читаю курс статистического мышления магистрам, и одна тема вызывает у них явные затруднения – чем стандартное отклонение отличается от стандартной ошибки, и в каких случаях, применять ту или иную статистику. А недавно в книге [Искусство статистики](https://baguzin.ru/wp/?p=25661) Дэвида Шпигельхалтера я узнал про бутстрэппинг, и понял, как объяснить различия стандартного отклонения и стандартной ошибки.

Для начала зададим 100 значений стандартной нормально распределенной случайной величины. В этом контексте *стандартная* означает, что ее матожидание μ = 0, а среднеквадратичное отклонение σ = 1. Поскольку значения в Excel получены с помощью волатильной функции СЛМАССИВ(), после любого действия они пересчитываются. Поэтому диаграммы в заметке и в файле будут отличаться.



Рис. 1. Нормально распределенная случайная величина

#### Стандартное отклонение

Стандартное отклонение является наиболее распространенным показателем рассеивания значений случайной величины относительно её среднего арифметического.

Стандартное отклонение вычисляют по формуле:



где *Х̅* – среднее арифметическое значений случайной величины (далее я буду называть его просто *средним*), *Хi* – отдельные значения случайной величины, *n* – число значений случайной величины.

Вообще термины разными авторами используются немного по-разному. Мне нравится следующий подход. Генеральную совокупность описывают параметрами, обозначаемыми греческими буквами: математическое ожидание μ и среднеквадратичное отклонение σ. Выборки описывают статистиками, обозначаемыми латинскими буквами: среднее арифметическое *Х̅* и стандартное отклонение *s*. Стандартное отклонение иначе называют *оценкой среднеквадратичного отклонения*. Как правило, есть генеральная совокупность с неизвестным нам среднеквадратичным отклонением σ. Извлекая выборку, и вычисляя стандартное отклонение *s*, мы кое-что узнаем о среднеквадратичном отклонении генеральной совокупности σ. Поэтому и говорят, что *s* является оценкой сигмы.

На самом деле за термином *стандартное отклонение* стоят две немного отличающиеся статистики. Но эта заметка о другом)) Подробнее см. [СТАНДОТКЛОН.В и СТАНДОТКЛОН.Г: в чем различие?](http://baguzin.ru/wp/?p=15634)

Нанесем на диаграмму линию среднего и границы, отстоящие от среднего на расстоянии ±2*s*.



Рис. 2. Линия среднего и границы ±2s

Для стандартного нормального распределения за границы ±2*s* попадают 4,6% значений.

=(1-НОРМ.СТ.РАСП(2;ИСТИНА))\*2 = 4,6%

И действительно 5 точек на рис. 2 лежат вне границ. Совпадение не обязано быть таким точным. Если вы откроете файл Excel на листе «Рис. 2» и понажимаете F9, принудительно изменяя случайные значения, то увидите, что вне границ может лежать от 2 до 8 точек. А если нажимать F9 достаточно долго, то вы получите более экстремальные числа точек вне границ. Для стандартного нормального распределения в пределах ±2*s* лежат приблизительно 95% значений. Поскольку *s* – оценка среднеквадратичного отклонения σ, которое в свою очередь равно 1, то 95% всех значений попадают в диапазон ≈ ±2.

Чем меньше *s*, тем кучнее значения случайной величины располагаются вокруг среднего. Итак

*стандартное отклонение – мера разброса случайной величины*

#### Среднее арифметическое выборки

Напомню, что мы задаем наши 100 значений с помощью генератора случайных чисел формулой в Excel

=НОРМ.СТ.ОБР(СЛМАССИВ(100;;0;1;ЛОЖЬ))

Хотя мы установили для генератора случайных чисел μ = 0 и σ = 1, значения *Х̅* и *s* будут немного отличаться для каждой выборки.



Рис. 3. Среднее и стандартное отклонение для 15 выборок размером *n* = 100

Теперь мы хотим узнать, что можно сказать о неизвестном математическом ожидании генеральной совокупности μ, подсчитав среднее арифметическое конкретной выборки, например, первой *Х̅* = 0,119?

#### Бутстрэп

Как пишет Евгения Поникарова, переводчик книги Дэвида Шпигельхалтера «Искусство статистики», слово bootstraps означает ремешки в виде ушка, которые прикрепляются к верхней части обуви, чтобы ее было проще натягивать. В английском языке есть выражение To pull oneself over a fence by one’s bootstraps (буквально — перетащить себя через ограду за ушки своей обуви), которое означает «выпутаться из своих проблем самому». Еще можно вспомнить [барона Мюнхгаузена](https://www.youtube.com/watch?v=tezbYG-nkpU), который вытащил себя за волосы из болота.

[Бутстрэп](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%91%D1%83%D1%82%D1%81%D1%82%D1%80%D1%8D%D0%BF_%28%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0%29) – компьютерный метод исследования распределения статистик, основанный на многократной генерации выборок методом Монте-Карло *на базе имеющейся одной выборки*. Термин ввел в 1977 году Брэдли Эфрон.

Итак, возьмем одну выборку из 100 случайных чисел и зафиксируем значения. Это наша исходная выборка (столбец А на рис. 4). Её среднее *Х̅(100)* = 0,121, а стандартное отклонение *s(100)* = 0,995. 95% значений попадают в диапазон ≈ 0,121 ± 1,990.

С помощью генератора случайных чисел будем формировать из исходной выборки бутстрэп-выборки разного размера. Хитрость заключается в том, что выбирать значения мы будем с возвращением. Т.е., все значения любой бутстрэп-выборки взяты из исходной, а вот уникальность значений будет потеряна. Например, выборка в столбце С содержит два значения 0,7394. Я подсветил их с помощью условного форматирования. Опять же, если вы откроете Excel-файл, то дублей может не быть, так как бутстрэп-выборка сформирована волатильной функцией СЛМАССИВ().



Рис. 4. Бутстрэп-выборка может содержать повторения

Для удобства последующей обработки расположим значения бутстрэп-выборки по горизонтали. Начнем со значения *n* = 3. Извлечем 1000 бутстрэп-выборок (рис. 5). В столбце А исходная выборка, *n* = 100. В столбце С номер бутстрэп-выборки. В столбцах D, E и F извлеченные значения. В столбце G средние значения по выборкам. В ячейке G1 среднее D1:F1, в ячейке G2 – среднее D2:F2 и т.д. На диаграмме показано распределение средних значений бутстрэп-выборок для *n* = 3.



Рис. 5. Распределений средних значений 1000 бутстрэп-выборок, *n* = 3

Среднее средних 1000 бутстрэп-выборок = 0,115, стандартное отклонение средних значений 1000 бутстрэп-выборок = 0,560. Напоминаю, что 95% исходных значений выборки попадают в диапазон 0,12 ± 1,99. Для бутстрэп-выборок *n* = 3 мы только что нашли, что 95% средних попадают в диапазон 0,115 ± 1,120 (0,560\*2 = 1,120). Кажется естественным, что разброс средних меньше, чем разброс отдельных значений.

Повторим моделирование для *n* = 5, 20, 50.



Рис. 6. С увеличением *n* стандартное отклонение средних значений бутстрэп-выборок уменьшается

Осмыслим, что мы получили. На рис. 6 представлены распределения средних значений бутстрэп-выборок разного размера из исходной выборки 100 случайных нормально распределенных чисел. Среднее каждого распределения близко к нулю (в нашей конкретной выборке из 100 чисел это среднее равно 0,121). А вот стандартное отклонение *s(n)* уменьшается по мере роста размера бутстрэп-выборок: *s(3) = 0,560, s(5) = 0,439, s(20) = 0,217, s(50) = 0,135.*

#### Стандартна ошибка

…или стандартная ошибка среднего – статистика, характеризующая стандартное отклонение выборочного среднего, рассчитанное по выборке размера *n* из генеральной совокупности.

Ничего не напоминает!? А что за статистику *s(n)* мы рассчитали выше в бутстрэп-анализе!? Да, это было стандартное отклонение выборочного среднего *X̅(n).*

Величина стандартной ошибки зависит от дисперсии генеральной совокупности σ2 и объёма выборки *n*. Стандартная ошибка среднего вычисляется по формуле

$$\left(2\right) SE\_{\overbar{x}}=\frac{σ}{\sqrt{n}}$$

где σ – величина среднеквадратического отклонения генеральной совокупности, и *n* – объём выборки. Поскольку дисперсия генеральной совокупности, как правило, неизвестна, то оценка стандартной ошибки вычисляется по формуле:

$$\left(3\right) SE\_{\overbar{x}}=\frac{s}{\sqrt{n}}$$

где *s* — стандартное отклонение случайной величины.

Сведем в одной таблице рассмотренные статистики:



Рис. 7. Рассмотренные статистики

Здесь в столбцах J:L приведены статистики для одной выборки размера *n*, а в столбце M – статистики для бутстрэп-выборок соответствующего размера с рис. 6. Если в Excel-файле на листе «Рис. 7» понажимать F9, вы увидите, что не всегда совпадение между столбцами L и M будет таким хорошим, но тенденция будет прослеживаться.

Выше я писал, что мы исследуем неизвестное математическое ожидание генеральной совокупности μ на основе среднего арифметического выборки *Х̅(100)* = 0,119.

Мы можем использовать статистику, именуемую *стандартной ошибкой*. Для нас она черный ящик – формула, выведенная на основе теории вероятностей. С другой стороны мы можем построить множество бутстрэп-выборок размера *n = 100*, и подсчитать стандартное отклонение средних этих бутстрэп-выборок. И мы показали, что стандартная ошибка для одной выборки и стандартное отклонение средних бутстрэп-выборок, это одно и то же! В нашем примере, получив *Х̅(100)* = 0,119, мы можем сказать, что с вероятностью 95% математическое ожидание генеральной совокупности μ лежит в диапазоне 0,119 ± 0,212 (0,106\*2=0,212). Итак

*стандартная ошибка – мера оценки математического ожидания генеральной совокупности μ на основании статистик выборки*

Например, 95%-ный доверительный интервал для μ

$$\left(4\right) \overbar{X}-2∙SE\leq μ\leq \overbar{X}+2∙SE,$$

$$где стандартная ошибка SE=\frac{s}{\sqrt{n}}$$

Понятно, что с увеличением размера выборки *n* доверительный интервал будет сужаться. В пределе при *n → ∞*, *Х̅ → μ* и *SE →* 0.